

Thème 4

Transformations des gaz parfaits

Questionnaire

1 – Lorsqu'un gaz est comprimé :

- ☒ sa pression augmente
- ☒ il reçoit de l'énergie sous forme de travail
- ☐ il cède de l'énergie sous forme de travail
- ☐ il ne cède et ne reçoit aucun travail
- ☐ il reçoit de l'énergie sous forme de chaleur

2 – Lorsqu'un gaz se détend :

- ☐ sa pression augmente
- ☐ il reçoit de l'énergie sous forme de travail
- ☒ il cède de l'énergie sous forme de travail
- ☐ il ne cède et ne reçoit aucun travail
- ☐ il reçoit de l'énergie sous forme de chaleur

3 – Un gaz décrit un cycle de compressions et de détente successives :

- ☒ il peut recevoir du travail élastique et céder de la chaleur
- ☒ il peut recevoir de la chaleur et céder du travail élastique
- ☐ il reçoit à la fois de la chaleur et du travail élastique
- ☐ il cède à la fois de la chaleur et du travail élastique

Exercices

1 - Détente irréversible d'un gaz parfait (Joule - Gay-Lussac)

Une mole de gaz parfait est contenue dans un récipient rigide de volume V , à 300 K et sous 10 bars. Ce récipient est relié à un autre récipient, initialement vide, de volume $9 V$. L'ensemble du dispositif est isolé thermiquement du milieu extérieur.

1 – On ouvre le robinet de liaison entre les 2 récipients. Quels sont le travail et la chaleur échangés par le gaz au cours de sa détente ? Quelle est la température finale ?

Si l'on considère que le milieu est isolé thermiquement, on peut aussi considérer que le milieu est adiabatique. Dans ce cas, l'échange de chaleur avec l'extérieur est nul $Q = 0$. Le volume est constant (récipient rigide). Dans ce cas, le travail est également nul puisque $\delta W = -P_{ext} \cdot dV$. Il en résulte une énergie interne du système qui ne varie pas : $\Delta U = W + Q = 0$. Or, l'énergie interne est une fonction d'état qui ne dépend que de la température : $\Delta U = n \cdot C_v^{mol} \cdot \Delta T = 0$. On en déduit $\Delta T = 0$, la température finale, soit $T = 300$ K.

2 – Calculer la variation d'enthalpie ΔH qui accompagne cette détente. ($R = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$)

Par définition, l'enthalpie s'écrit : $\Delta H = \Delta U + \Delta(PV)$. Ce qui nous donne :

$$\Delta H = \Delta U + \Delta(PV) = \Delta U + \Delta(nRT) = (C_v + R) \cdot n \cdot \Delta T = n \cdot C_p^{mol} \cdot \Delta T = 0$$

On retiendra à ce stade que l'enthalpie s'écrit $\Delta H = n \cdot C_p^{mol} \cdot \Delta T$, fonction d'état qui ne dépend que de la température.

2 - Compression Isotherme d'un gaz parfait

Calculer le travail échangé avec le milieu extérieur au cours de la compression isotherme de 2 moles de diazote de la pression $P_1 = 1$ bar à la pression $P_2 = 20$ bars à la température de 298 K dans les deux cas suivants :

1. Compression effectuée de manière réversible.

Etat 1	Etat 2
$P_1 = 1 \text{ bar}$	$P_2 = 20 \text{ bars}$
$n = 2 \text{ moles}$	$n = 2 \text{ moles}$
$P_1 V_1 = nRT_1$	$P_2 V_2 = nRT_2$
$T_1 = T_2 = P_1 V_1 / nR = 298 \text{ K}$	$T_1 = T_2 = P_2 V_2 / nR = 298 \text{ K}$

Puisque la transformation est réversible, nous avons $P_{ext} = P_{gaz}$. Par définition, le travail échangé avec le milieu extérieur s'écrit :

$$\delta W = -P_{ext} \cdot dV \quad \text{soit} \quad W = \int -P_{ext} \cdot dV = \int -nRT \cdot \frac{dV}{V}$$

Ce qui nous donne : $W = -nRT \cdot \ln V = nRT \cdot \ln P$

Pour une transformation entre un état 1 et un état 2, nous obtenons :

$$W = -nRT \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nRT \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad \underline{\text{AN:}} \quad W_{\text{reversible}} = \underline{14844 \text{ J}}$$

2. Transformation effectuée de manière à ce que l'azote soit soumis à la pression extérieure de 20 bars dès le premier instant (irréversible).

Pour une transformation irréversible, la pression $P_{\text{ext}} = \text{Constante} = 20$ bars. Dans ce cas, nous appliquons directement l'expression du travail échangé avec l'extérieur :

$$\delta W = -P_{\text{ext}} \cdot dV \quad \text{soit} \quad W = \int -P_{\text{ext}} \cdot dV \Rightarrow W = -P_{\text{ext}} \cdot (V_2 - V_1)$$

$$\text{donc} \quad W = -P_{\text{ext}} \cdot \left(\frac{nRT}{P_2} - \frac{nRT}{P_1} \right) \quad \underline{\text{AN:}} \quad W_{\text{irreversible}} = \underline{94148 \text{ J}}$$

Autre façon : il nous faut donc déterminer le volume V_2 . Or nous avons $P_1 V_1 = P_2 V_2$ puisque $T_1 = T_2$.

$$V_2 = \frac{P_1 V_1}{P_2} \quad \text{donc} \quad W = -nRT \cdot V_1 \cdot \left(\frac{P_1}{P_2} - 1 \right) \quad \underline{\text{AN:}} \quad W_{\text{irreversible}} = 94148 \text{ J}$$

3. Comparer les résultats obtenus et conclure.

On trouve deux énergies différentes $W_{\text{reversible}} \neq W_{\text{irreversible}}$. Le travail W n'est pas une fonction d'état.

3 - Deux moles de gaz parfait à la pression initiale de 100 bars se détendent, à la température constante $T = 300 \text{ K}$, du volume initial V_1 au volume final $V_2 = 10 V_1$.

- a) Calculer, le volume et la pression finale.

Etat 1	Etat 2
$P_1 = 100 \text{ bar}$	$P_2 = 10 \text{ bars}$
$n = 2 \text{ moles}$	$n = 2 \text{ moles}$
$P_1 V_1 = nRT_1$	$P_2 V_2 = nRT_2$
$T_1 = T_2 = P_1 V_1 / nR = 300 \text{ K}$	$T_1 = T_2 = P_2 V_2 / nR = 300 \text{ K}$
	$V_2 = 10 V_1$

On nous informe que le gaz est un gaz parfait et que la transformation se fait à température constante donc :

$$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} \quad \text{donc} \quad V_2 = 10 \cdot V_1 = 10 \cdot \frac{nRT_1}{P_1} \quad \underline{\text{AN:}} \quad \underline{V_1 = 0,4998 \text{ L}}, \quad \underline{V_2 = 4,998 \text{ L}}$$

- b) Calculer les énergies transférées, respectivement sous forme de travail et de chaleur, lorsque la détente s'effectue infiniment lentement, c'est à dire de façon réversible.

Lorsque la détente s'effectue de façon réversible, nous pouvons écrire : $P_{\text{ext}} = P_{\text{gaz}}$. Par définition, le travail échangé avec le milieu extérieur s'écrit :

Travail	Chaleur
$\delta W = -P_{\text{ext}} \cdot dV \quad \text{soit}$ $W = \int -P_{\text{ext}} \cdot dV = \int -nRT \cdot \frac{dV}{V}$ Ce qui nous donne : $W = -nRT \cdot \ln V = nRT \cdot \ln P$ Pour une transformation entre un état 1 et un état 2, nous obtenons : $W = -nRT \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nRT \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ <u>AN</u> : $W_{\text{réversible}} = \underline{-11\,486\text{ J}}$	L'énergie interne d'un milieu ne dépend que de la température : $dU = n \cdot C_v^{\text{mol}} \cdot dT = 0$ Donc $U = W + Q \Rightarrow Q = -W$ Ce qui nous donne : $Q = nRT \cdot \ln V = -nRT \cdot \ln P$ Pour une transformation entre un état 1 et un état 2, nous obtenons : $Q = nRT \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -nRT \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ <u>AN</u> : $Q_{\text{réversible}} = \underline{11\,486\text{ J}}$

- c) Calculer les énergies transférées, respectivement sous forme de travail et de chaleur, lorsque la détente s'effectue spontanément, contre une pression extérieure égale à la pression finale du système dès le premier instant de la transformation.

Pour une transformation irréversible, la pression $P_{\text{ext}} = \text{Constante} = 10 \text{ bars}$.

Travail	Chaleur
$\delta W = -P_{\text{ext}} \cdot dV \quad \text{soit} \quad W = -P_{\text{ext}} \cdot \Delta V$ $W = -P_{\text{ext}} \cdot (V_2 - V_1)$ <u>AN</u> : $W_{\text{irréversible}} = \underline{-4489\text{ J}}$ <u>Rq</u> : $W = -nRT \cdot \left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)$	L'énergie interne d'un milieu ne dépend que de la température : $dU = n \cdot C_v^{\text{mol}} \cdot dT = 0$ Donc $U = W + Q \Rightarrow Q = -W$ <u>AN</u> : $Q_{\text{irréversible}} = \underline{4489\text{ J}}$

4 - Calculer l'énergie échangée avec le milieu extérieur sous forme de travail au cours de la compression isotherme de 56 g de diazote de la pression $P_1 = 1 \text{ bar}$ à la pression $P_2 = 20 \text{ bars}$ à la température de 298 K dans les deux cas suivants ($M(\text{N}_2) = 28 \text{ g mol}^{-1}$):

a) compression effectuée de manière réversible

Etat 1	Etat 2
$P_1 = 1 \text{ bar}$	$P_2 = 20 \text{ bars}$
$m_1 = 56 \text{ g}$	$m_2 = 56 \text{ g}$
$P_1 V_1 = nRT_1$	$P_2 V_2 = nRT_2$
$T_1 = T_2 = P_1 V_1 / nR = 298 \text{ K}$	$T_1 = T_2 = P_2 V_2 / nR = 298 \text{ K}$

On nous informe que le gaz est un gaz parfait et que la transformation se fait à température constante donc :

$$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} \quad \text{donc} \quad V_2 = \frac{P_1 V_1}{P_2} \quad \underline{\text{AN}} : V_1 = 0,4998 \text{ L}, \quad V_2 = 4,998 \text{ L}$$

$$n = \frac{m}{M} \quad \text{soit } n = 2 \text{ moles.}$$

Puisque la transformation est réversible, nous avons $P_{\text{ext}} = P_{\text{gaz}}$. Par définition, le travail échangé avec le milieu extérieur s'écrit :

$$\delta W = -P_{\text{ext}} \cdot dV \quad \text{soit} \quad W = \int -P_{\text{ext}} \cdot dV = \int -nRT \cdot \frac{dV}{V}$$

$$\text{Ce qui nous donne : } W = -nRT \cdot \ln V = nRT \cdot \ln P$$

Pour une transformation entre un état 1 et un état 2, nous obtenons :

$$W = -nRT \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = nRT \cdot \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \quad \underline{\text{AN}} : W_{\text{réversible}} = \underline{14\,844 \text{ J}}$$

b) transformation effectuée de telle manière que l'azote soit soumis à la pression extérieure de 20 bars dès le premier instant.

Pour une transformation irréversible, la pression $P_{\text{ext}} = \text{Constante} = 20 \text{ bars}$. Dans ce cas, nous appliquons directement l'expression du travail échangé avec l'extérieur :

$$\delta W = -P_{\text{ext}} \cdot dV \quad \text{soit} \quad W = \int -P_{\text{ext}} \cdot dV \Rightarrow W = -P_{\text{ext}} \cdot (V_2 - V_1)$$

$$\text{donc} \quad W = -P_{\text{ext}} \cdot \left(\frac{nRT}{P_2} - \frac{nRT}{P_1} \right) \quad \underline{\text{AN}} : W_{\text{irréversible}} = \underline{94148 \text{ J}}$$

Comparer les résultats obtenus.

On trouve deux énergies différentes $W_{\text{réversible}} \neq W_{\text{irréversible}}$. Le travail W n'est pas une fonction d'état. De plus, la transformation irréversible consomme plus d'énergie utile que la transformation réversible.

5 - Transformation cyclique d'un gaz parfait

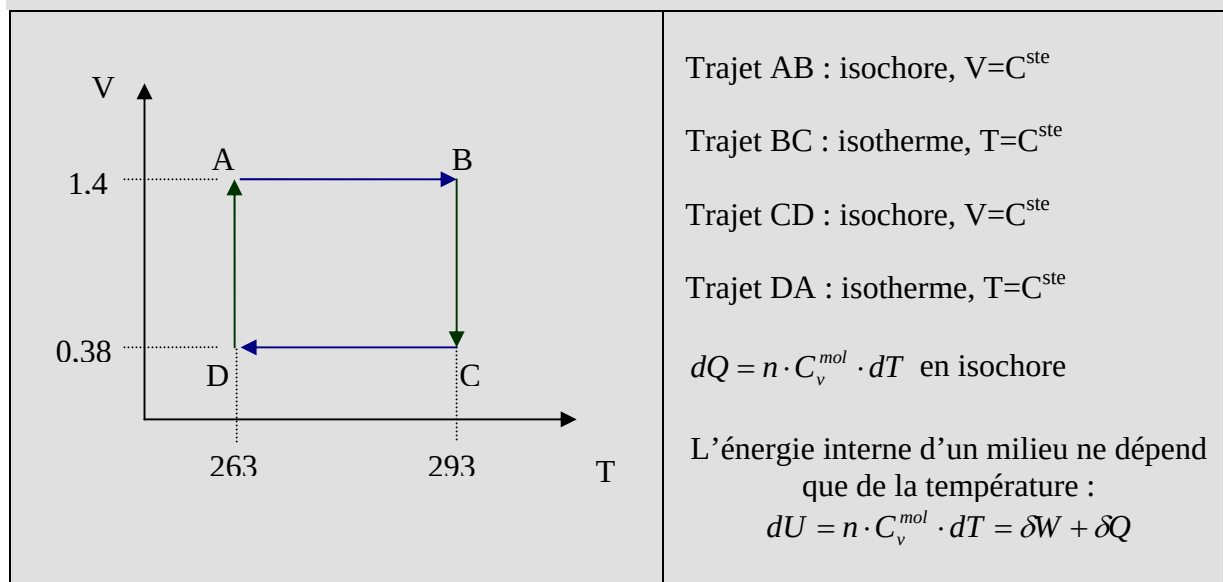
Un gaz parfait décrit un cycle ABCDA constitué par les transformations réversibles suivantes :

- AB : échauffement isochore jusqu'à la température 293 K ;
- BC : compression isotherme jusqu'au volume 0,38 m³ ;
- CD : refroidissement isochore jusqu'à la température T_A ;
- DA : détente isotherme.

Données : T_A = 263 K, P_A = 10⁵ Pa, V_A = 1,40 m³, C_v = 20,8 J mol⁻¹ K⁻¹

Rappelons avant tout que transformation isochore s'effectue à volume constant, et une transformation isotherme à température constante.

Pour comprendre un peu mieux le problème, représentons le sous la forme d'un schéma :



- 1) Déterminer les quantités de chaleur Q_{AB}, Q_{BC}, Q_{CD} et Q_{DA} ainsi que les travaux mécaniques W_{AB}, W_{BC}, W_{CD} et W_{DA} mis en jeu au cours des quatre transformations.

Pour le trajet AB : Isochore

$$dV = 0 \Rightarrow \delta W = 0 \Rightarrow \delta Q = dU = n \cdot C_v^{mol} \cdot dT$$

$$W_{AB} = 0 \quad \text{et} \quad Q_{AB} = n \cdot C_v \cdot \Delta T = 39936 J$$

Pour le trajet BC : Isotherme

$$dT = dU = dH = 0 \Rightarrow \delta W = -PdV = -nRT \frac{dV}{V} \Rightarrow \delta Q = -\delta W$$

$$W_{AB} = -nRT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = 203308 J \quad \text{et} \quad Q_{AB} = -203308 J$$

Pour le trajet CD : Isochore

$$dV = 0 \Rightarrow \delta W = 0 \Rightarrow \delta Q = dU = n \cdot C_v^{mol} \cdot dT$$

$$W_{AB} = 0 \quad \text{et} \quad Q_{AB} = n \cdot C_v \cdot \Delta T = -39936 J$$

Pour le trajet DA : Isotherme

$$dT = dU = dH = 0 \Rightarrow \delta W = -PdV = -nRT \frac{dV}{V} \Rightarrow \delta Q = -\delta W$$

$$W_{AB} = -nRT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = -182491J \quad \text{et} \quad Q_{AB} = 1824891J$$

- 2) Evaluer la quantité de chaleur totale Q et le travail total W mis en jeu au cours du cycle ainsi que la somme W+Q. Conclure.

Par conséquent, nous pouvons en conclure le travail total et la chaleur échangés avec l'extérieur au cours de la transformation ABCD :

$$W_{tot} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} \quad \text{soit} \quad W_{tot} = 20817 J$$

$$Q_{tot} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} \quad \text{soit} \quad Q_{tot} = -20817 J$$

Donc $U_{tot} = W_{tot} + Q_{tot} = 0$ sur tout le cycle. U est donc bien une fonction d'état puisque cette fonction ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée. Elle est nulle par conséquent sur le cycle.

6 – Un cylindre vertical, de section $S = 100 \text{ cm}^2$, fermé par un piston horizontal de masse négligeable et mobile sans frottement, contient 0,5 mole d'hélium (que l'on considérera comme un gaz parfait). Les parois du cylindre et du piston sont imperméables et isolées thermiquement. L'air environnant est à la température $T_0 = 300 \text{ K}$ et à la pression de 1 bar.

- a) La température initiale de l'hélium étant égale à T_0 , calculer ses pression et volume initiaux (respectivement P_0 et V_0).

A revoir

$$V_0 = \frac{nRT_0}{P_0} \quad \text{soit} \quad V_0 = \underline{12,471 \text{ Litres}}$$

- b) On applique brusquement une surcharge en plaçant sur le piston une masse $M = 20 \text{ kg}$. La compression rapide qui en résulte est considérée comme adiabatique. Après quelques oscillations, le piston s'immobilise, l'état du gaz étant défini par P_1 , V_1 et T_1 . Sachant que pour l'hélium : $C_p/C_v = 1,67$, calculer (en prenant $g = 10 \text{ m s}^{-2}$) la température T_1 ainsi que l'échange d'énergie sous forme de travail.

Par définition, le milieu est isolé thermiquement, donc la compression est adiabatique. On peut donc d'ores et déjà dire que $Q = 0$ et $U = W$ puisque la transformation est irréversible. Calculons le travail W. Par définition $W = -P_{ext} \cdot dV$ et $dU = n \cdot C_v^{mol} \cdot dT$. Il nous faut donc avant tout calculer la pression extérieure. Appliquons le principe fondamental de la dynamique.

$$\sum Force = 0 \Rightarrow -P_{ext} \cdot S + P_0 \cdot S + mg = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{P_{ext} = P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}}$$

On peut donc écrire :

$$dU = W \Rightarrow nC_v^{mol}(T_1 - T_0) = -\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot (V_1 - V_0) = -P_{ext} \cdot (V_1 - V_0)$$

$$nC_v^{mol}(T_1 - T_0) = -P_{ext} \cdot \left(\frac{nRT_1}{P_{ext}} - \frac{nRT_0}{P_0}\right) \Rightarrow T_1 \cdot (C_v^{mol} + R) = C_v^{mol}T_0 + \frac{P_{ext}}{P_0}RT_0$$

$$T_1 = \frac{C_v^{mol}T_0}{(C_v^{mol} + R)} + \frac{R}{(C_v^{mol} + R)} \cdot \frac{P_{ext}T_0}{P_0}$$

A ce stade, nous devons utiliser le coefficient $\gamma = C_p^{mol} / C_v^{mol}$. Pour cela, rappelons la relation de Mayer pour les gaz parfaits : $C_p^{mol} - C_v^{mol} = R$. On a donc $\gamma = 1 + R/C_v$ et

$$\boxed{T_1 = \frac{T_0}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{P_{ext}}{P_0}T_0} \quad \underline{\text{AN :}} \quad T_1 = \underline{324,07\text{K}} \quad \text{et} \quad \underline{W = 149,35\text{J}}$$

- c) Serait-on arrivé au même état final si l'on avait réalisé cette compression adiabatique de façon réversible ? Si la réponse est négative, reprendre les questions précédentes, cette fois-ci pour la transformation réversible.

Si l'on considère une transformation adiabatique et réversible, la relation à prendre en considération est la suivante :

$$T \cdot P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = C^{ste} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad \underline{\text{AN :}} \quad T_1 = \underline{322,77\text{K}}$$

Si l'on considère une transformation adiabatique, $Q=0$ et $dU = \delta W = nC_v^{mol}dT$.

$$W = \Delta U = nC_v^{mol}(T_1 - T_0) \quad \text{soit} \quad \boxed{W = n \cdot \left(\frac{R}{\gamma - 1}\right) \cdot (T_1 - T_0)} \quad \underline{\text{AN :}} \quad \underline{W = 141,25\text{J}}$$

Bilan :

L'énergie interne s'écrit : $\Delta U = n \cdot C_v^{mol} \cdot \Delta T = m \cdot C_v^{masse} \cdot \Delta T = W + Q$

L'enthalpie s'écrit : $\Delta H = n \cdot C_p^{mol} \cdot \Delta T = m \cdot C_p^{masse} \cdot \Delta T = \Delta U + \Delta(PV)$

Ces deux fonctions sont des fonctions d'état qui ne dépendent que de la température.

Pour une transformation réversible : $P_{ext} = P_{gaz}$ à tout instant

Pour une transformation irréversible : $P_{ext} = C^{ste}$.