Thème 1

Aspects mathématiques des fonctions d'état et applications

Questionnaire

1 – Une différentielle dF = A dx + B dy est une différentielle totale exacte si :

- ☐ son intégration conduit à une fonction unique, à une constante près
- ☐ les dérivées partielles $(\frac{\partial A}{\partial y})_x$ et $(\frac{\partial B}{\partial x})y$ sont égales à 0
- ☐ les dérivées partielles $(\frac{\partial A}{\partial y})_x$ et $(\frac{\partial B}{\partial x})y$ sont égales
- ☐ les dérivées partielles $(\frac{\partial A}{\partial x})_y$ et $(\frac{\partial B}{\partial y})_x$ sont égales à 0
- ☐ les dérivées partielles $(\frac{\partial A}{\partial x})_y$ et $(\frac{\partial B}{\partial y})_x$ sont égales

2 – Au cours d'une transformation d'un état A à un état B, la variation d'une fonction d'état :

- ☐ dépend du chemin suivi pour aller de A à B
- ☐ est indépendante du chemin suivi
- ☐ ne dépend pas du chemin suivi quand la transformation est réversible
- ☐ dépend du chemin suivi quand la transformation est réversible
- ☐ ne dépend pas du chemin suivi quand la transformation est irréversible
- ☐ dépend du chemin suivi quand la transformation est irréversible

3 – On comprime un système thermoélastique, puis on relâche la pression.

- ☐ le système revient à son état initial
- ☐ le système reste en l'état atteint après la surpression exercée
- ☐ le système retourne à un état différent de l'état initial
- ☐ l'état final dépend de la valeur de la surpression

Exercices

1 - Calculez les différentielles des fonctions suivantes. Vérifiez dans chaque cas l'égalité des dérivées secondes croisées.

$F_1(x,y) = x^2 + y^2 - 3\,xy$ $\qquad F_2(x,y) = \frac{y}{x}$

2 - Les formes différentielles suivantes sont-elles exactes ?

$dF_1 = (x^5 - 6\,x\,y)\,dy + (5\,x^4\,y - 3\,y^2)\,dx$ $\qquad dF_2 = (y^2 - x)\,dx + x^2\,dy$

3 – Soit à calculer $\int_{0,0}^{2,3}(dx + xdy)$ où les bornes correspondent respectivement à x et à y)

a) Est ce que le résultat dépend du chemin parcouru lors de l'intégration ?

b) Vérifiez votre conclusion de la question a) en effectuant le calcul selon les chemins suivants :
- en allant des points (0,0) à (2,3) le long d'une droite.
- en allant des points (0,0) à (2,3) le long d'une première droite de (0,0) à (0,3) puis le long d'une seconde droite de (0,3) à (2,3).

b) Mêmes questions avec $\int_{0,0}^{2,3}(xdy + ydx)$

4 – Application aux coefficients thermoélastiques

On considère un fluide dont la fonction d'état est f (P, V, T) = 0.

a) Ecrire les différentielles dP et dV

b) Démontrer les relations : $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}$ et $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$

c) On définit les 3 coefficients thermoélastiques α, β et χ :

$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ $\qquad$ α est le coefficient de dilatation isobare

$\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ $\qquad$ β est le coefficient d'augmentation de pression isochore

$\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ $\qquad$ χ est le coefficient de compressibilité isotherme

Démontrer la relation : $\alpha = \beta\,\chi\,P$