

THÈME 5 : les Oscillateurs.

Questionnaire

1-) Par définition, nous avons :

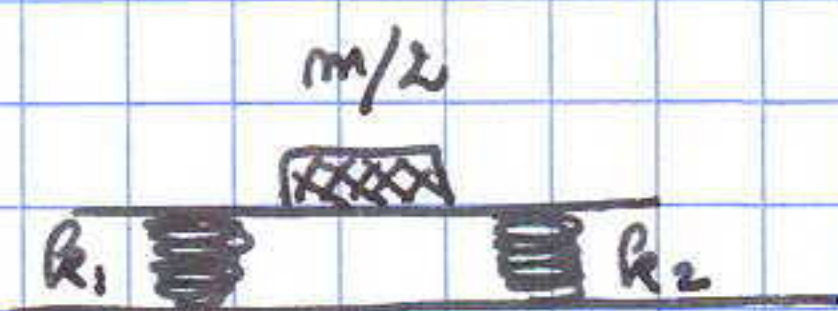
- Période = T [s]
- Fréquence = $f = 1/T$ [s⁻¹] ou [Hz]
- Longueur d'onde = λ [m]
- Pulsation = $\omega = 2\pi f$ [rad.s⁻¹]

Exercice 1 : Essieu avant d'un véhicule.

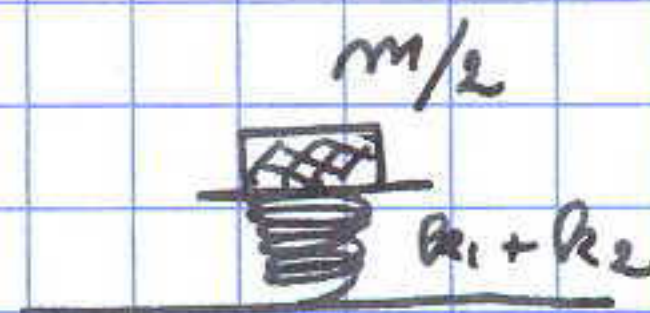
• Référentiel terrestre $R(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

• masse $m/2$

• 2 ressorts k_1, k_2, l_0 .



$\equiv$



$$\vec{F}_{\text{ressort}} = \vec{F}_{e_1} + \vec{F}_{e_2} = -k_1 (z - l_0) \vec{e}_z + k_2 (z - l_0) \vec{e}_z = -(k_1 + k_2) (z - l_0) \vec{e}_z$$

$$\text{ici } k_1 = k_2 = k \text{ donc } \boxed{k_1 + k_2 = 2k}$$

On a donc un ressort équivalent de raideur $2k$ et longueur à vide l_0 .

2) On enfonce la masse de 5 cm. On note z_0 l'abscisse initiale

a) Pour décrire l'équation différentielle du mouvement, on applique la RFD à la masse $m/2$ assimilable à un pt M.

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{ress}} = \frac{m}{2} \vec{a}_{M/R} \quad \text{avec} \quad \vec{P} = m/2 \vec{g} \\ \vec{F} = -2k (z - l_0) \vec{e}_z$$

$$\text{soit suivant } (\vec{e}_z) : \frac{m}{2} a_z = \frac{m}{2} \ddot{z} = -\frac{m}{2} g - 2k (z - l_0)$$

$$\text{d'où } \ddot{z} = -g - \frac{4k}{m} (z - l_0)$$

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{4k}{m} z = -g + \frac{4kl_0}{m}}$$

A l'équilibre, $\ddot{z} = 0$ et $z = z_{eq}$ soit $z_{eq} = l_0 - \frac{mg}{4k}$. Si l'on pose

$$Z = z - z_{eq} \text{ alors } \ddot{Z} = \ddot{z} \text{ d'où}$$

$$\boxed{\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = 0}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{4k/m}$$

2) On est en présence d'une équation du second ordre sans second membre et dont la solution se met sous la forme :

$$z(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

A $t=0$, on a $z(0) = z_0 - z_{eq} = A$

$\dot{z}(0) = B\omega_0 = 0$ soit $B=0$.

donc $z(t) = z_0 \cos \omega_0 t$ ou

$$z(t) = z_{eq} + (z_0 - z_{eq}) \cos \omega_0 t$$

c) la détermination de l'accélération maximale se fait par $\ddot{z}(t)$ maximale soit

$$\ddot{z}(t) = -\omega_0^2 (z_0 - z_{eq}) \cos \omega_0 t \quad \text{maximale pour } \cos \omega_0 t = 1$$

$$\ddot{z}_{\max} = -\omega_0^2 (z_0 - z_{eq})$$

A.N: $\omega_0 = \sqrt{\frac{4g}{m}} = 8,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\ddot{z}_{\max} = 3,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx 0,4g$.

L'accélération semble assez faible, donc réaliste. Par contre, une fois les oscillations démarrées, celles-ci ne s'amortissent plus, ce qui n'est plus réaliste. Il faut ajouter des frottements.

Exercice 2: Oscillations forcées d'une particule sur un cerceau mobile.

• point matériel M , masse m

• $\vec{g} = -\alpha \vec{v}$

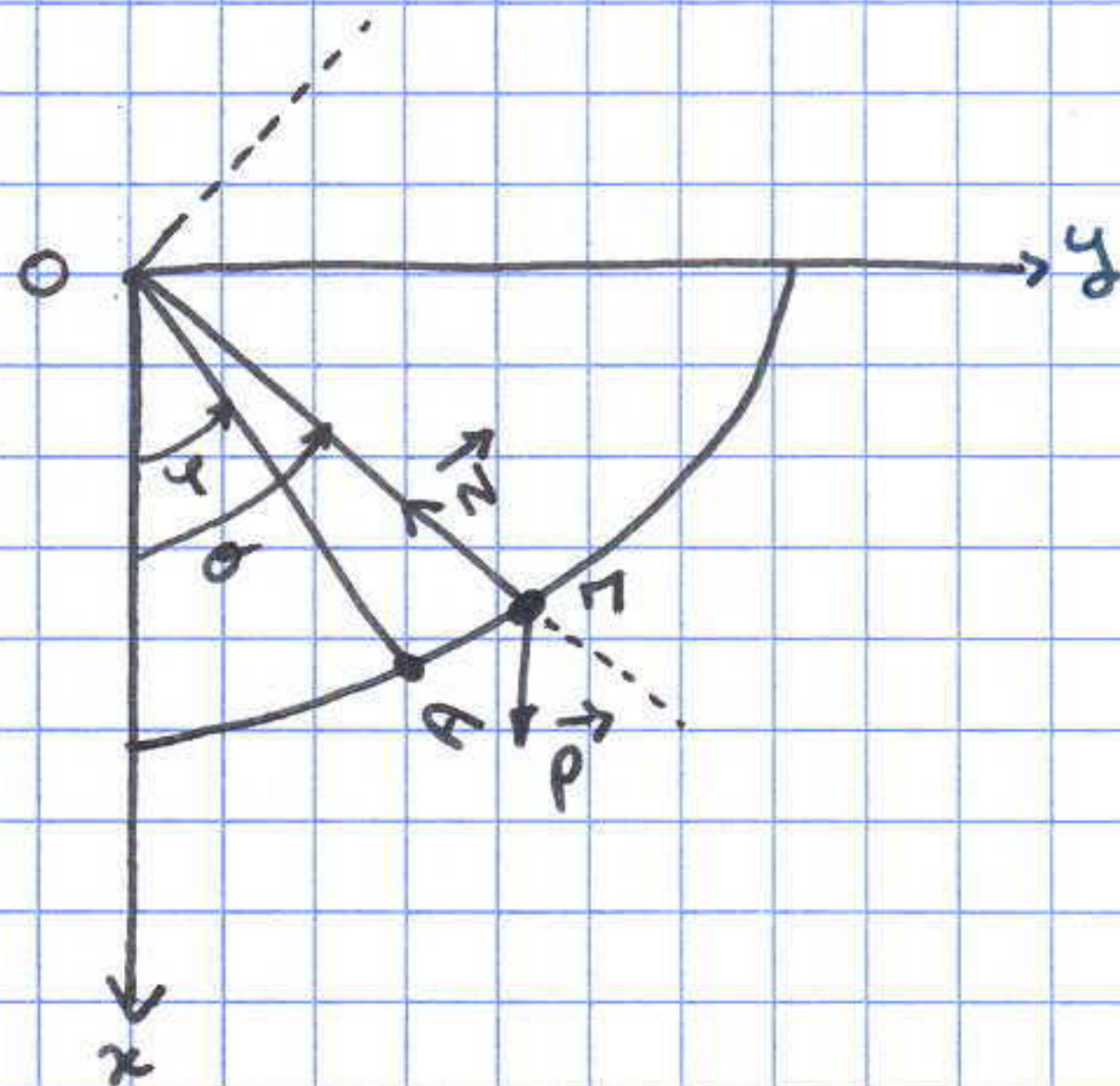
• $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$

• $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\Omega t)$

• $\varphi = (\vec{Ox}, \vec{OA})$

• $\vec{P}; \vec{N}; \vec{g}$

• $\sum \vec{F} = m \vec{a} (m/R)$



1) Bilan des forces :

$$\vec{P} = mg (-\cos \theta \vec{e}_n - \sin \theta \vec{e}_t)$$

$$\vec{N} = N \vec{e}_n$$

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha R (\dot{\theta} - \dot{\varphi}) \vec{e}_t$$

Par projection sur $\vec{e}_t$, on obtient :

$$-mg \sin \theta - \alpha R (\dot{\theta} - \dot{\varphi}) = m R \ddot{\theta} \quad \text{or } \sin \theta \approx \theta$$

donc

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = -\frac{\alpha}{m} \varphi_0 \Omega \sin \Omega t$$

2) On pose en notation complexe, $\underline{\theta}(t) = \theta_n e^{j(\Omega t + \phi)} = \theta_n e^{j\phi} e^{j\Omega t} = \underline{\theta}_n e^{j\Omega t}$

soit

$$\ddot{\theta} = (j\Omega)^2 \underline{\theta}_n e^{j\Omega t} = -\Omega^2 \underline{\theta}_n e^{j\Omega t}$$

$$\dot{\theta} = j\Omega \underline{\theta}_n e^{j\Omega t}$$

$$\theta = \underline{\theta}_n e^{j\Omega t}$$

d'où

$$-\Omega^2 \underline{\theta}_n + \frac{\alpha}{m} j\Omega \underline{\theta}_n + \frac{g}{R} \underline{\theta}_n = -\frac{\alpha}{m} \varphi_0 \Omega$$

donc

$$\underline{\theta}_n = \frac{-\alpha/m \varphi_0 \Omega}{g/R - \Omega^2 + j\frac{\alpha\Omega}{m}}$$

son module vaut donc

$$|\underline{\theta}_n| = \theta_n = \frac{\alpha \varphi_0 \Omega / m}{\sqrt{(g/R - \Omega^2)^2 + (\frac{\alpha\Omega}{m})^2}}$$

→ On en conclut que la résonance d'amplitude, c'est à dire la maximale de θ_n s'obtient pour $(g/R - \Omega^2)^2 + (\alpha\Omega/m)^2$ minimale, soit

$$g/R - \Omega^2 = 0$$

d'où

$$R_r = g/\Omega^2$$

Exercice 3 : Modélisation d'un haut-parleur.

- Courant $i(t)$
- masse m
- axe $(O, \vec{e}_x)$
- Force amortisseur.
- Remont raideur k , longueur à vide l_0
- $\vec{F}(t) = K \cdot i(t)$ force extérieure.
- $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ avec ω pulsation.

1) La RFD appliquée au système nous donne $m\vec{a}_{n/R} = \sum \vec{F}$ avec

$$\sum \vec{F} = \underbrace{\vec{P}}_{-mg\vec{e}_y} + \underbrace{\vec{R}}_{R\vec{e}_y} + \underbrace{\vec{F}}_{K i(t)\vec{e}_x} + \underbrace{\vec{F}_r}_{-R_x\vec{e}_x} + \underbrace{\vec{F}_g}_{-f_v\vec{e}_x}$$

En projetant suivant $\vec{e}_x$, on a :

$$m\ddot{x} = K i(t) - R_x - f_v \dot{x}$$

soit

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{f_v}{m} \dot{x} + \frac{R}{m} x = \frac{K}{m} I_m \cos \omega t.}$$

2) En posant $\omega_0^2 = R/m$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{f_v}{m}$, on peut alors écrire l'équation

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{K}{m} I_m \cos \omega t$$

Si on a $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{f_v}{m}$ et que l'on souhaite avoir $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors il faut

$$\frac{m\omega_0}{f_v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad f_v = \sqrt{2} m \omega_0$$
$$\underline{f_v = \sqrt{2} k m \approx 17,3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}$$

3) En utilisant la méthode de résolution par les complexes, on pose

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$$

$$x \rightarrow j\omega \underline{x_m} e$$

$$x \rightarrow \underline{x_m} e^{j\omega t}$$

$$\text{D'où } -\omega^2 \underline{x_m} + \frac{\omega_0}{\phi} j\omega \underline{x_m} + \omega_0^2 \underline{x_m} = \frac{k}{m} \cdot I_m$$

$$\text{donc } \underline{x_m} = \frac{\frac{k}{m} \cdot I_m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \left(\frac{\omega_0 \omega}{\phi} \right)}$$

Par conséquent x_m est donnée par le module de $\underline{x_m}$
 ϕ est donnée par $\arctg(\text{Partie Im} / \text{Partie Réelle})$.

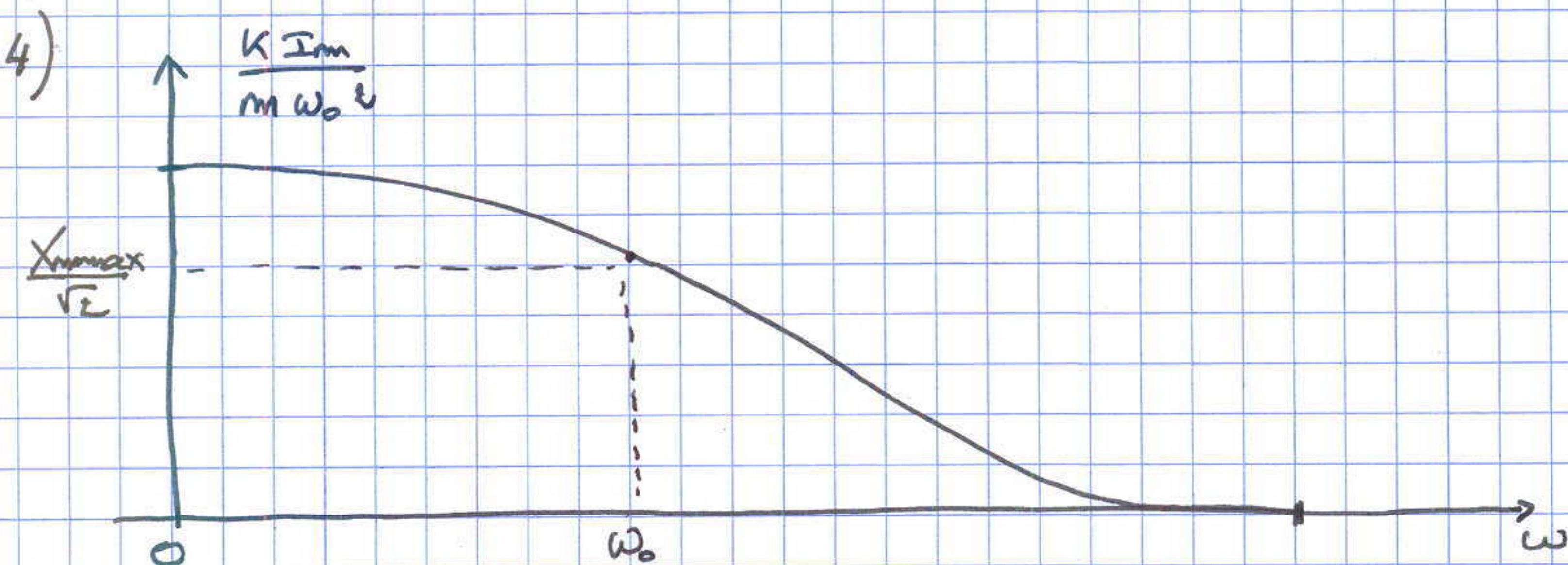
$$\text{Soit } |\underline{x_m}| = \frac{\frac{k}{m} \cdot I_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{\phi}\right)^2}}$$

$$\text{et } \phi = \begin{cases} -\arctg \left[\frac{\omega_0 \omega / \phi}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] & \text{si } \omega < \omega_0 \\ -\pi - \arctg \left[\frac{\omega_0 \omega / \phi}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] & \text{si } \omega > \omega_0. \end{cases}$$

* Rappel : $\phi = \phi_{\text{numérateur}} - \phi_{\text{dénominateur}} = 0 - \arctg \left(\frac{\text{Im dénom}}{\text{Re dénom}} \right)$
 ou $-\pi$ si $\omega > \omega_0$.

A.N. $\omega = 6280 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ $\omega_0 = 1224 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
 $x_m = 0,5 \text{ mm}$ $\phi = -2,86 \text{ rad } (\omega > \omega_0)$

$$\text{donc } x(t) = 5 \cdot 10^{-4} \cos(6280t - 2,86)$$



La limite de la bande passante est définie par l'égalité :

$$X_m(\omega_c) = \frac{X_{m \max}}{\sqrt{2}}$$

soit

$$\frac{X_{m \max}}{\sqrt{2}} = \frac{K \cdot I_m}{m \omega_0^2 \sqrt{2}} = X_m(\omega_c) = \frac{K \cdot I_m / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_c^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega_c}{\varphi}\right)^2}}$$

d'où

$$\omega_0^2 \sqrt{2} = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_c^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega_c}{\varphi}\right)^2} \quad \text{or } \varphi = 1/\sqrt{2}$$

Donc

$$2\omega_0^4 = \omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega_c^2 + \omega_c^4 + 2\omega_0^2\omega_c^2$$

d'où

$$\omega_c^4 = \omega_0^4$$

Donc

$$\boxed{\omega_c = \omega_0 = 1224,7 \text{ rad.s}^{-1}}$$