

Questionnaire.

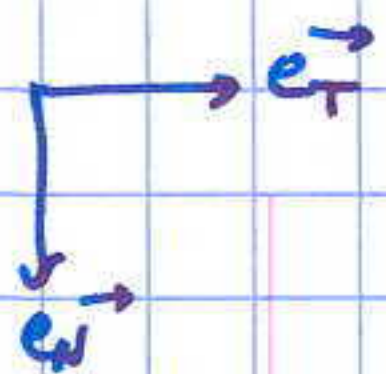
1- Un mouvement uniforme : vitesse constante, $\|\vec{v}\| = c^{te}$

→ ne veut pas dire qu'il n'y a pas d'accélération car si $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$,
on peut avoir $a_N \neq 0$ donc $\|\vec{a}\| \neq 0$.

2- Uniformément décéléré veut dire que $\frac{dv}{dt} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} < 0$ donc que $a_T < 0$

soit $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$.

3- Dans la base de Frénet, $\vec{e}_N$, $\vec{e}_T$, $\vec{e}_b$ sont les 3 vecteurs de la base.



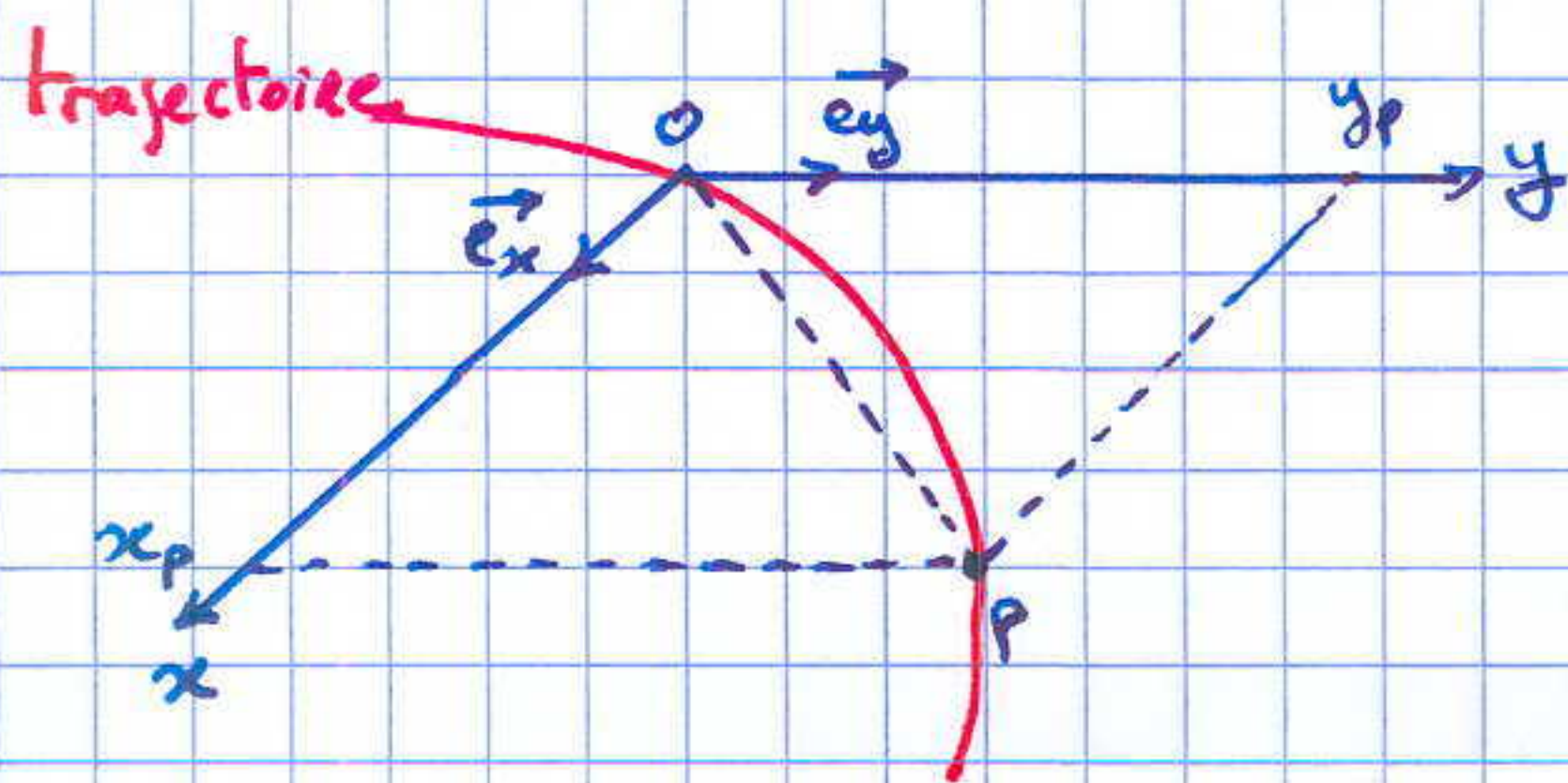
donc $\vec{e}_b = \vec{e}_T \wedge \vec{e}_N$

la base est donc $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_b)$.

4- Par définition, le vecteur $\vec{e}_T$ est le vecteur tangent à la trajectoire et se définit par $\frac{d\vec{e}_T}{ds} = \frac{\vec{e}_N}{R}$ et c'est un vecteur unitaire dirigé vers le centre

du cercle osculateur, donc dirigé vers la concavité et sa direction change si le point M bouge car il reste attaché au point M.

Exercice 1: Etude d'une trajectoire en coordonnées cartésiennes.



- base Cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$
- coord. cartésiennes (x, y)
- $x = ct^2$ et $y = bt$

Par définition, nous avons $\vec{OP} = ct^2 \vec{e}_x + bt \vec{e}_y = \begin{vmatrix} ct^2 \\ bt \\ 0 \end{vmatrix}_{Bca}$

on a donc $t = y/b$ donc $x = ct^2 = cy^2/b^2$ soit

$$x(t) = \frac{c}{b^2} \cdot y^2(t) \text{ parabole.}$$

b) Par définition, le vecteur vitesse $\vec{v}_{P/R}$ s'écrit $\vec{v}_{P/R} = \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_R$.

$$\begin{aligned} \text{on a donc } \vec{v}_{P/R} &= \frac{d}{dt} (ct^2 \vec{e}_x)_R + \frac{d}{dt} (bt \vec{e}_y)_R \\ &= 2ct \vec{e}_x + ct^2 \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_R + b \vec{e}_y + bt \left(\frac{d\vec{e}_y}{dt} \right)_R \end{aligned}$$

or les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont fixes dans R donc leur dérivée s'annule
il nous reste

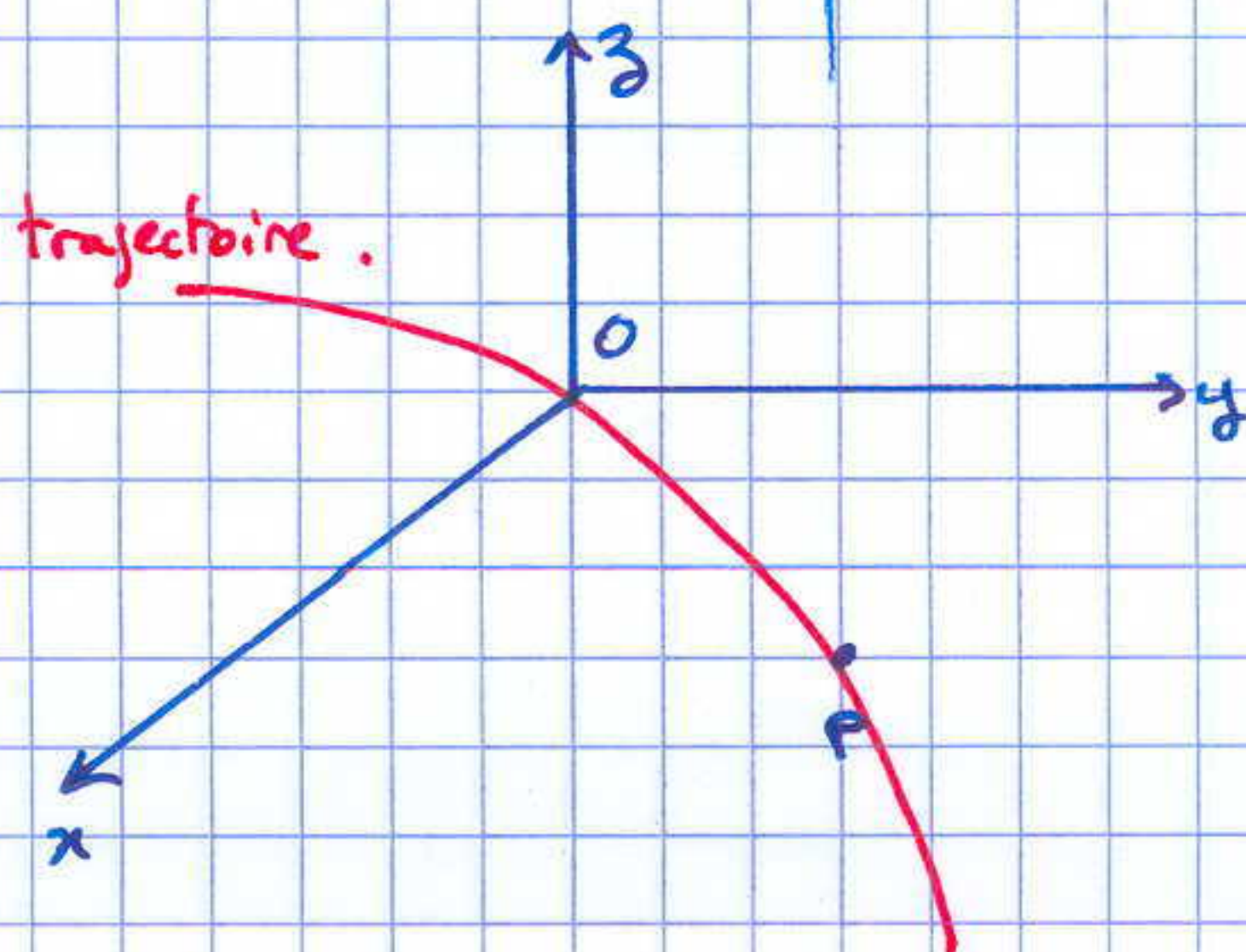
$$\vec{v}_{P/R} = 2ct \vec{e}_x + b \vec{e}_y = \begin{vmatrix} 2ct \\ b \\ 0 \end{vmatrix}_{Bca}$$

De même, le vecteur accélération est défini par $\vec{a}_{P/R} = \left(\frac{d\vec{v}_{P/R}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d^2 \vec{OP}}{dt^2} \right)_R$

$$\text{soit } \vec{a}_{P/R} = 2c \vec{e}_x = \begin{vmatrix} 2c \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{Bca}$$

vecteur constant

$\|\vec{a}\| = c^{ste}$, accélération constante



c) Nous avons montré que $\vec{v}_{P/R} = a c t \vec{e}_x + b \vec{e}_y = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$

$$\text{donc } \|\vec{v}_{P/R}\|^2 = v_x^2 + v_y^2 = 4c^2 t^2 + b^2$$

d'où

$$\|\vec{v}_{P/R}\| = \sqrt{4c^2 t^2 + b^2}$$

mouvement accéléré car dépendant du temps

Par définition, le vecteur accélération dans la base de Frenet s'écrit

$$\vec{a}_{P/R} = a_T \vec{e}_T + a_N \vec{e}_N \quad \text{avec}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$$

$$\text{donc } a_T = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{4c^2 t^2 + b^2} \right) = \frac{1}{2} \times 4c^2 \times 2t \times \frac{1}{\sqrt{4c^2 t^2 + b^2}}$$

soit

$$a_T = \frac{4c^2 t}{\sqrt{4c^2 t^2 + b^2}}$$

$$\text{donc } \vec{a}_{P/R} = a_T \vec{e}_T + a_N \vec{e}_N \quad \text{et} \quad \|\vec{a}_{P/R}\|^2 = a_T^2 + a_N^2 \quad \text{soit}$$

$$a_N = \sqrt{\|\vec{a}_{P/R}\|^2 - a_T^2}$$

Nous avons montré précédemment que $\|\vec{a}_{P/R}\| = 2c$ soit

$$a_N^2 = (2c)^2 - \frac{(4c^2 t)^2}{4c^2 t^2 + b^2} = 4c^2 - \frac{16c^4 t^2}{4c^2 t^2 + b^2}$$

$$a_N^2 = \frac{4c^2(4c^2 t^2 + b^2) - 16c^4 t^2}{4c^2 t^2 + b^2} = \frac{16c^4 t^2 + 4c^2 b^2 - 16c^4 t^2}{4c^2 t^2 + b^2}$$

$$a_N^2 = \frac{4c^2 b^2}{4c^2 t^2 + b^2}$$

d'où

$$a_N = \frac{2cb}{(4c^2 t^2 + b^2)^{1/2}}$$

d) Si on pose $\alpha = (\vec{e}_x, \vec{v}_{P/R})$ alors on peut écrire le produit scalaire

$$\vec{e}_x \cdot \vec{v}_{P/R} = \|\vec{e}_x\| \cdot \|\vec{v}_{P/R}\| \cdot \cos(\vec{e}_x, \vec{v}_{P/R}) = \|\vec{e}_x\| \cdot \|\vec{v}_{P/R}\| \cdot \cos \alpha$$

$$\text{donc } \cos \alpha = \frac{(\vec{e}_x \cdot \vec{v}_{P/R})}{\|\vec{e}_x\| \cdot \|\vec{v}_{P/R}\|} = \frac{(1 \times 2ct) + (0 \times b) + (0 \times 0)}{1 \times (4c^2t^2 + b^2)^{1/2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{2ct}{(4c^2t^2 + b^2)^{1/2}}$$

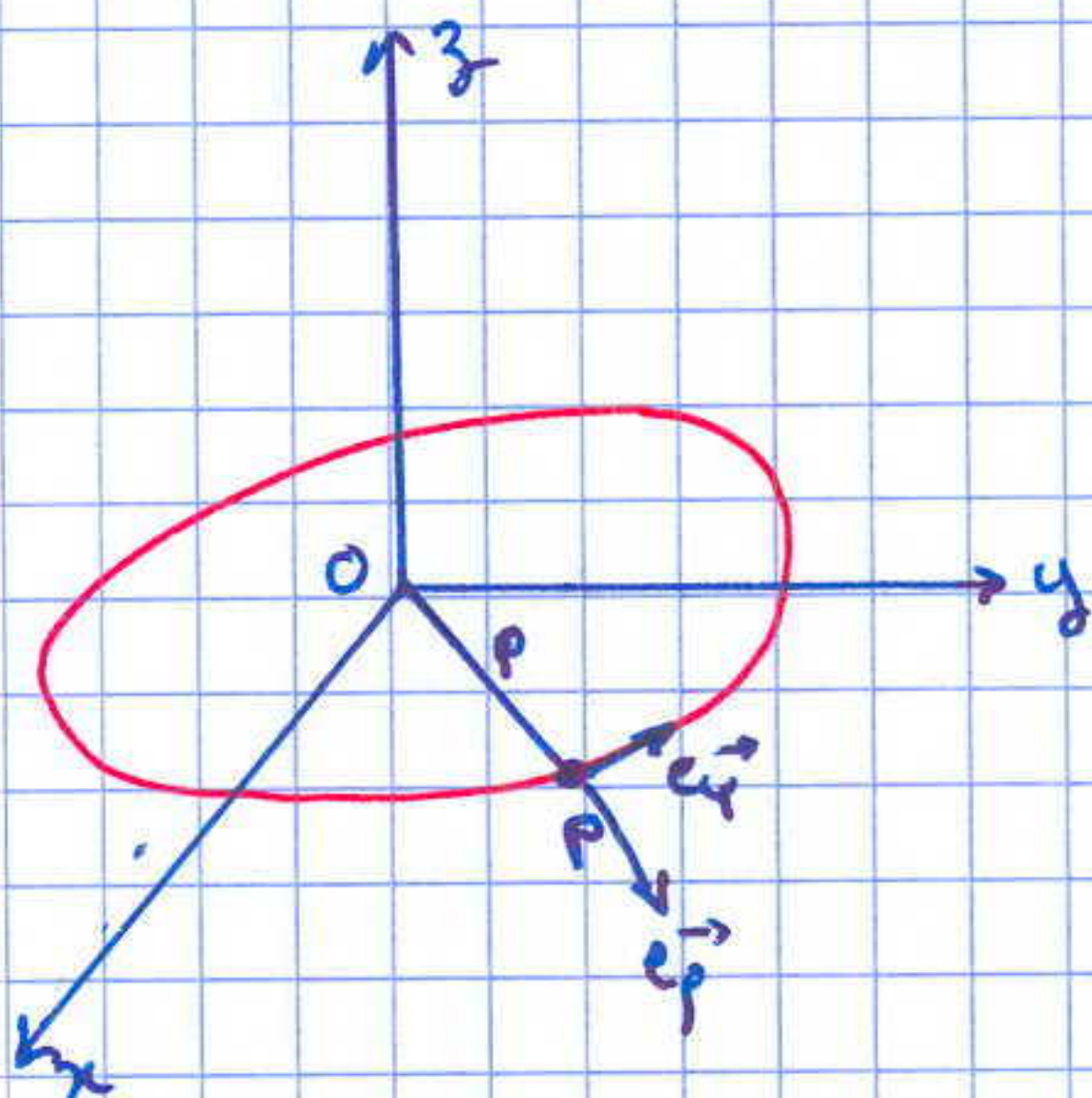
dépend du temps.

D'après le dessin, $\vec{a}_{P/R} = 2c \vec{e}_x$ et $\vec{a}_{P/R} \cdot \vec{v}_{P/R} = \|\vec{a}_{P/R}\| \cdot \|\vec{v}_{P/R}\| \cdot \cos \alpha$

$$\|\vec{a}_{P/R}\| = \frac{\vec{a}_{P/R} \cdot \vec{v}_{P/R}}{\|\vec{v}_{P/R}\| \cdot \cos \alpha} = \frac{(2c) \times (2ct)}{\cos \alpha \cdot (4c^2t^2 + b^2)^{1/2}} = \frac{4c^2t}{\frac{2ct}{(4c^2t^2 + b^2)^{1/2}} \cdot (4c^2t^2 + b^2)^{1/2}}$$

$$\text{donc } \|\vec{a}_{P/R}\| = 2c$$

Exercice 2: Mouvement plan circulaire uniforme.



- $\rho = A \cos \varphi + B \sin \varphi$
- $\varphi = \omega t$
- $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$
- (x, y, z)
- $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ avec ρ, φ .

en cylindrique

$$\vec{OP} = \rho \vec{e}_\rho$$

$$a) \quad \vec{v}_{P/R} = \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_R = \frac{d}{dt} (p \vec{e}_p) = \dot{p} \vec{e}_p + p \left(\frac{d\vec{e}_p}{dt} \right)_R$$

$$\text{soit } \vec{v}_{P/R} = \dot{p} \vec{e}_p + p \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = \begin{vmatrix} \dot{p} \\ p \dot{\varphi} \\ 0 \end{vmatrix}_{\text{Buhl}}$$

$$\text{Comme } \begin{cases} \varphi(t) = \omega t \\ \dot{\varphi}(t) = \omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ \dot{p} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \end{cases}$$

$$\text{on peut écrire } \vec{v}_{P/R} = \begin{vmatrix} -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \\ A\omega \cos \omega t + B\omega \sin \omega t \\ 0 \end{vmatrix}_{\text{Buhl}}$$

on peut donc calculer la norme du vecteur vitesse

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_{P/R}\|^2 &= (-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t)^2 + (A\omega \cos \omega t + B\omega \sin \omega t)^2 \\ &= A^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + B^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + 2AB\omega^2 \sin \omega t \cos \omega t \\ &\quad + A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + B^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + 2AB\omega^2 \sin \omega t \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\text{soit } \|\vec{v}_{P/R}\|^2 = A^2 \omega^2 + B^2 \omega^2 = \omega^2 (A^2 + B^2)$$

$$\text{donc } \|\vec{v}_{P/R}\| = \omega (A^2 + B^2)^{1/2}$$

mouvement uniforme

$$\begin{aligned} b) \quad \text{on a } \vec{a}_{P/R} &= \left(\frac{d\vec{v}_{P/R}}{dt} \right)_R = \frac{d}{dt} (\dot{p} \vec{e}_p) + \frac{d}{dt} (p \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) \\ &= \ddot{p} \vec{e}_p + \dot{p} \left(\frac{d\vec{e}_p}{dt} \right)_R + \dot{p} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + p \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + p \dot{\varphi} \left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \right)_R \\ &= \ddot{p} \vec{e}_p + \dot{p} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{p} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + p \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - p \dot{\varphi}^2 \vec{e}_p \\ &= (\ddot{p} - p \dot{\varphi}^2) \vec{e}_p + (2\dot{p} \dot{\varphi} + p \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Donc

$$\vec{a}_{P/R} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi = \begin{vmatrix} \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} \\ \emptyset \end{vmatrix}_{\text{Bazyl}}$$

Comme $\begin{cases} \varphi(t) = \omega t \\ \dot{\varphi}(t) = \omega \\ \ddot{\varphi}(t) = \emptyset \end{cases}$

et $\begin{cases} \rho = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ \dot{\rho} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \\ \ddot{\rho} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t = -\rho\omega^2 \end{cases}$

on obtient

$$\vec{a}_{P/R} = (-2\rho\omega^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\omega) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}_{P/R} = \begin{vmatrix} -2\omega^2 A \cos \omega t - 2\omega^2 B \sin \omega t \\ -2\omega^2 A \sin \omega t + 2\omega^2 B \cos \omega t \\ \emptyset \end{vmatrix}_{\text{Bazyl}}$$

c) on nous demande l'équation cartésienne, c'est à dire $x(t)$ et $y(t)$ puis une relation entre les deux. D'après les relations de passage Cartésien-Cylind, nous avons

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{soit ici} \quad \begin{cases} x = A \cos^2 \omega t + B \cos \omega t \sin \omega t \\ y = A \sin \omega t \cos \omega t + B \sin^2 \omega t \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} x^2 = (A \cos^2 \omega t + B \cos \omega t \sin \omega t)^2 \\ y^2 = (A \sin \omega t \cos \omega t + B \sin^2 \omega t)^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 = A^2 \cos^4 \omega t + B^2 \cos^2 \omega t \sin^2 \omega t + 2AB \cos^3 \omega t \sin \omega t \\ y^2 = A^2 \sin^2 \omega t \cos^2 \omega t + B^2 \sin^4 \omega t + 2AB \sin^3 \omega t \cos \omega t \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = A^2 \cos^4 \omega t + A^2 \sin^2 \omega t \cos^2 \omega t + B^2 \sin^4 \omega t + B^2 \cos^2 \omega t \sin^2 \omega t + 2AB \cos \omega t \sin \omega t (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)$$

$$x^2 + y^2 = A^2 \cos^4 \omega t + A^2 \cos^2 \omega t (1 - \cos^2 \omega t) + B^2 \sin^4 \omega t + B^2 \sin^2 \omega t (1 - \sin^2 \omega t) + 2AB \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$x^2 + y^2 = \cancel{A^2 \cos^4 \omega t} + A^2 \cos^2 \omega t - \cancel{A^2 \cos^4 \omega t} \\ + \cancel{B^2 \sin^4 \omega t} + B^2 \sin^2 \omega t - \cancel{B^2 \sin^4 \omega t} \\ + 2AB \cos \omega t \sin \omega t$$

$$x^2 + y^2 = A^2 \cos^2 \omega t + B^2 \sin^2 \omega t + 2AB \cos \omega t \sin \omega t \\ = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)^2$$

donc $(x^2 + y^2) = \rho^2$

De plus

$$x = A \cos^2 \omega t + B \sin \omega t \cos \omega t \\ y = A \cos \omega t \sin \omega t + B \sin^2 \omega t$$

donc $Ax = A^2 \cos^2 \omega t + AB \sin \omega t \cos \omega t$
 $By = AB \cos \omega t \sin \omega t + B^2 \sin^2 \omega t$

soit $x^2 + y^2 = \rho^2 = Ax + By$

d'où $(x^2 - Ax) + (y^2 - By) = 0$

Si on veut connaître le rayon du cercle, il faut recréer sous la forme

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

soit $(x^2 - Ax) + (y^2 - By) = 0$

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4} + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4} = 0$$

d'où $\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} (A^2 + B^2)$

Cercle de centre $(A/2; B/2)$

et de rayon $1/2 (A^2 + B^2)^{1/2}$

d)

Dans la base de Frenet, on sait que $\vec{a}_{P/R} = a_T \vec{e}_T + a_N \vec{e}_N$

avec $a_T = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$; $a_N = \frac{v^2}{R}$; $\|\vec{a}_{P/R}\|^2 = a_T^2 + a_N^2$

or $\|\vec{v}_{P/R}\| = \text{Constante}$ donc $\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = a_T = 0$ donc

$$\|\vec{a}_{P/R}\| = a_N = \frac{v^2}{R}$$

il faut donc calculer la norme du vecteur accélération $\|\vec{a}_{P/R}\|$, soit

$$\begin{aligned}\|\vec{a}_{P/R}\|^2 &= (-2A\omega^2 \cos \omega t - 2\omega^2 B \sin \omega t)^2 + (-2A\omega^2 \sin \omega t + 2B\omega^2 \cos \omega t)^2 \\ &= 4A^2\omega^4 \cos^2 \omega t + 4AB\omega^4 \cos \omega t \sin \omega t + 4B^2\omega^4 \sin^2 \omega t \\ &\quad + 4A^2\omega^4 \sin^2 \omega t - 4AB\omega^4 \cos \omega t \sin \omega t + 4B^2\omega^4 \cos^2 \omega t \\ &= 4A^2\omega^4 + 4B^2\omega^4\end{aligned}$$

soit

$$\|\vec{a}_{P/R}\| = 2\omega^2(A^2 + B^2)^{1/2}$$

$$\text{Donc } a_N = 2\omega^2(A^2 + B^2)^{1/2} = v^2/R \quad \text{avec } v^2 = \|\vec{v}\|^2 = \omega^2(A^2 + B^2)$$

$$\text{d'où } R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^2}{\|\vec{a}_{P/R}\|} = \frac{\omega^2(A^2 + B^2)}{2\omega^2(A^2 + B^2)^{1/2}}$$

soit

$$R = \frac{1}{2}(A^2 + B^2)^{1/2}$$

Exercice 3: Mouvement Cycloïdal

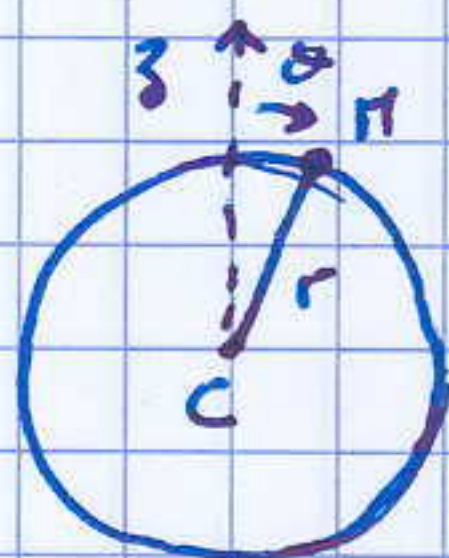
- Référentiel $R(0, x, y, z)$
- Base Cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- $\Pi(\varnothing, \varnothing, 2a)$
- $\theta = (C_1, C_3)$
- R^* repère (C, x, y, z) en translation / R
- $\vec{v}_R(C) = v_0 \vec{e}_x$

a) Pour avoir la vitesse v_0 , il faut avoir la distance que l'on devra par le temps. Il faut donc connaître la distance parcourue sur le sol.

la circonférence du cercle est par définition $2\pi r = \int_0^{2\pi} r d\theta$

donc sur le sol, un élément parcourt une distance infiniment petite $r d\theta$ et la somme de toutes ces petites distances donnent $2\pi r$.

Ici, nous avons le schéma suivant :



si θ est très petit, nous pouvons dire que

$$\rightarrow \text{distance} = ds = r \sin \theta$$

puisque θ est très petit $\sin \theta \approx \theta$

$$\text{donc } \underline{\text{distance} = ds = r\theta}$$

on peut en déduire que

$$\theta = \frac{d(r\theta)}{dt} = \frac{d(a\theta)}{dt} = a\dot{\theta} = a\omega$$

2) On veut écrire la vitesse de M dans R^* , c'est à dire dans $(C, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$$\vec{CM} = \begin{vmatrix} (\vec{CM} \cdot \vec{e}_x) \\ (\vec{CM} \cdot \vec{e}_y) \\ (\vec{CM} \cdot \vec{e}_z) \end{vmatrix}_{B^*} = \begin{vmatrix} \|\vec{CM}\| \cdot \|\vec{e}_x\| \cdot \cos(\vec{CM}, \vec{e}_x) \\ \|\vec{CM}\| \cdot \|\vec{e}_y\| \cdot \cos(\vec{CM}, \vec{e}_y) \\ \|\vec{CM}\| \cdot \|\vec{e}_z\| \cdot \cos(\vec{CM}, \vec{e}_z) \end{vmatrix}_{B^*} = \begin{vmatrix} a \cdot \cos(\pi/2 - \theta) \\ a \cdot \cos \theta \\ a \cdot \cos \pi/2 \end{vmatrix}_{B^*}$$

$$\text{soit } \vec{CM} = \begin{vmatrix} a \sin \theta \\ a \cos \theta \\ 0 \end{vmatrix}_{B^*}$$

la trajectoire est un cercle de rayon a puisque $x^2 + y^2 = a^2$

On veut écrire la vitesse de M dans R , c'est à dire dans $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$$\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM} \quad \text{il nous faut donc trouver } \vec{OC}$$

$$\text{Or nous savons que } \vec{v}_R(C) = v_0 \vec{e}_x = \frac{d\vec{OC}}{dt}$$

Donc par intégration, nous trouvons $\vec{OC}$ tel que :

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} V_0 t \\ cste \\ cste \end{pmatrix}_B$$

Conditions initiales: $t=0$; $OC_x = \phi$
 $OC_y = 2a/\omega = a$
 $OC_z = \phi$

donc $\vec{OC} = \begin{pmatrix} V_0 t \\ a \\ \phi \end{pmatrix}_B$

et $\vec{CM} = \begin{pmatrix} a \sin \theta \\ a \cos \theta \\ \phi \end{pmatrix}_B$

donc $\vec{OM} = \begin{pmatrix} a \sin \theta + V_0 t \\ a \cos \theta + a \\ \phi \end{pmatrix}_B$

rappel: $1 + \cos \theta = \cos^2 \theta / 2$
 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
 $= 2\cos^2 \theta - 1$

donc $\vec{OM} = \begin{pmatrix} a \sin \theta + V_0 t \\ a^2 \cos^2 \theta / 2 \\ \phi \end{pmatrix}_B$

Trajectoire: $\theta = \omega t$ par définition dans le cours.

donc $v_0 = R\dot{\theta} = a\dot{\theta} = a\omega$

donc $\vec{OM} = \begin{pmatrix} a \sin \omega t + a\omega t \\ 2a \cos^2 \omega t / 2 \\ \phi \end{pmatrix}_B$ cycloïde

3) On nous demande la vitesse et l'accélération de M dans R^* , c'est à dire dans $(C, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Par définition:

$$\vec{v}_{M/R^*} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R^*} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{M/R^*} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/R^*}}{dt} \right)_{R^*}$$

d'où $\vec{v}_{M/R^*} = \frac{d}{dt} [a \sin \theta \vec{e}_x + a \cos \theta \vec{e}_y + \phi \vec{e}_z]_{R^*}$
 $= a \frac{d \sin \theta}{dt} \vec{e}_x + \underbrace{a \sin \theta \frac{d \vec{e}_x}{dt}}_{\phi \vec{e}_x \text{ fixe}} + a \frac{d \cos \theta}{dt} \vec{e}_y + \underbrace{a \cos \theta \frac{d \vec{e}_y}{dt}}_{\phi \vec{e}_y \text{ fixe}} + \phi \vec{e}_z$

donc $\vec{v}_{M/R^*} = a\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_x - a\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_y + \phi \vec{e}_z$

$$\vec{a}_{M/R^*} = \frac{d}{dt} \left[a \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_x - a \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_y \right]_{R^*}$$

$$= a \ddot{\theta} \frac{d \cos \theta}{dt} \vec{e}_x + a \cos \theta \frac{d \dot{\theta}}{dt} \vec{e}_x - a \dot{\theta} \frac{d \sin \theta}{dt} \vec{e}_y + a \sin \theta \frac{d \dot{\theta}}{dt} \vec{e}_y + \phi \vec{e}_z$$

$$= a \ddot{\theta}^2 (-\sin \theta) \vec{e}_x + a \ddot{\theta} \cos \theta \vec{e}_x - a \ddot{\theta}^2 \cos \theta \vec{e}_y + a \ddot{\theta} \sin \theta \vec{e}_y + \phi \vec{e}_z$$

Donc $\vec{a}_{M/R^*} = (a \ddot{\theta} \cos \theta - a \ddot{\theta}^2 \sin \theta) \vec{e}_x + (a \ddot{\theta} \sin \theta - a \ddot{\theta}^2 \cos \theta) \vec{e}_y + \phi \vec{e}_z$

on rappelle que $\theta = \omega t$ donc $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{\theta} = \phi$ ce qui simplifie les écritures :

$$\vec{v}_{M/R^*} = \begin{pmatrix} a\omega \cos \omega t \\ -a\omega \sin \omega t \\ \phi \end{pmatrix}_{R^*} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{M/R^*} = \begin{pmatrix} -a\omega^2 \sin \omega t \\ -a\omega^2 \cos \omega t \\ \phi \end{pmatrix}_{R^*}$$

on peut remarquer que $\|\vec{v}_{M/R^*}\| = a\omega$ et $\|\vec{a}_{M/R^*}\| = a\omega^2$ dans R^* .

4) on nous demande la vitesse et l'accélération de M dans R, c'est à dire dans $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ donc

$$\vec{v}_{M/R} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R \quad \text{et} \quad \vec{a}_{M/R} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt} \right)_R$$

soit $\vec{v}_{M/R} = \frac{d}{dt} \left[a(\omega t + \sin \omega t) \vec{e}_x + a(1 + \cos \omega t) \vec{e}_y + \phi \vec{e}_z \right]$

$$= a\omega \vec{e}_x + a\omega \cos \omega t \vec{e}_x - a\omega \sin \omega t \vec{e}_y + \phi \vec{e}_z$$

d'où $\vec{v}_{M/R} = (V_0 + V_0 \cos \omega t) \vec{e}_x + (-V_0 \sin \omega t) \vec{e}_y + \phi \vec{e}_z$

$$= (V_0 + V_0 \cos \theta) \vec{e}_x + (-V_0 \sin \theta) \vec{e}_y + \phi \vec{e}_z$$

$$= 2V_0 \cos^2 \theta/2 \vec{e}_x - V_0 \sin \theta \vec{e}_y + \phi \vec{e}_z$$

d'où $\vec{a}_{M/R} = (-V_0 \omega \sin \omega t) \vec{e}_x + (-V_0 \omega \cos \omega t) \vec{e}_y + \phi \vec{e}_z$

$$= (-V_0 \dot{\theta} \sin \theta) \vec{e}_x + (-V_0 \dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_y + \phi \vec{e}_z$$

or $V_0 = a\dot{\theta}$
 $= a\omega$

donc

$$\vec{v}_{M/R} = \begin{pmatrix} 2a\dot{\theta} \cos^2 \theta/2 \\ -a\dot{\theta} \sin \theta \\ \phi \end{pmatrix}_B ; \quad \vec{a}_{M/R} = \begin{pmatrix} -a\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ -a\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \phi \end{pmatrix}_B$$

On peut donc en déduire la norme de $\vec{v}_{n/r}$ et $\vec{a}_{n/r}$ telle que

$$\|\vec{v}_{n/r}\|^2 = (2a\dot{\theta} \cos^2 \theta/2)^2 + (-a\dot{\theta} \sin \theta)^2$$

et $\|\vec{a}_{n/r}\|^2 = (-a\ddot{\theta} \sin \theta)^2 + (-a\dot{\theta}^2 \cos \theta)^2$

soit $\|\vec{v}_{n/r}\|^2 = 4a^2\dot{\theta}^2 \cos^4 \theta/2 + a^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta$

$$= a^2\dot{\theta}^2 [4 \cos^4 \theta/2 + \sin^2 \theta] = a^2\dot{\theta}^2 [(2 \cos^2 \theta/2)^2 + \sin^2 \theta]$$

$$= a^2\dot{\theta}^2 [(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta] = a^2\dot{\theta}^2 [1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta]$$

$$= a^2\dot{\theta}^2 [2 + 2 \cos \theta] = 2a^2\dot{\theta}^2 [1 + \cos \theta]$$

soit $\|\vec{v}_{n/r}\|^2 = 4a^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta/2$

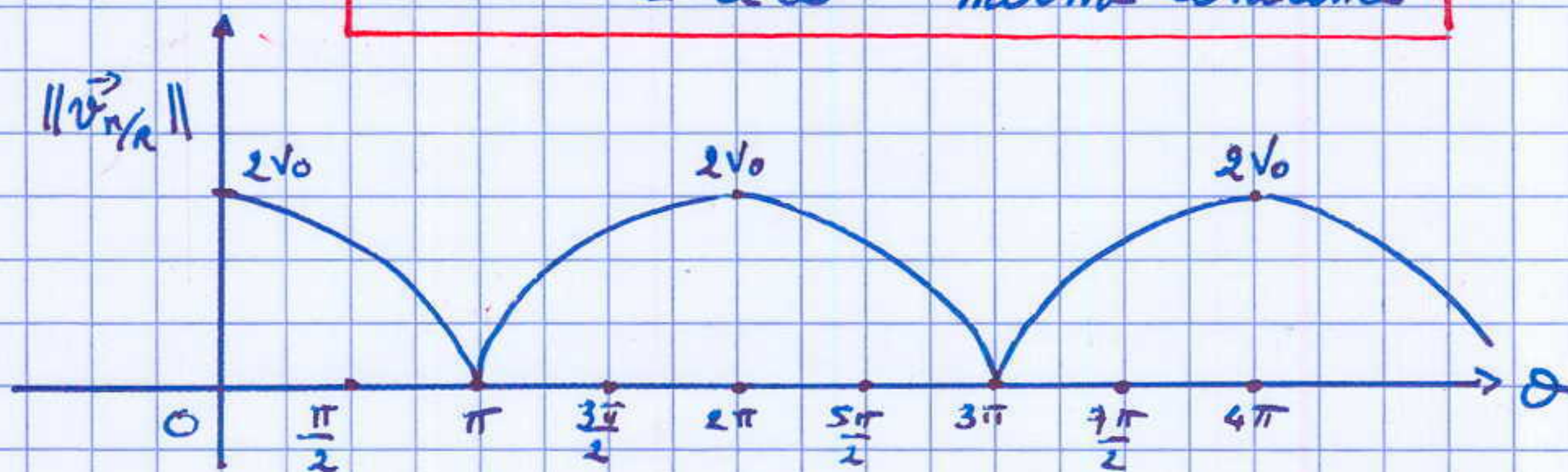
soit

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_{n/r}\| &= 2a\dot{\theta} |\cos \theta/2| \\ &= 2a\omega |\cos \omega t/2| \\ &= 2V_0 |\cos \omega t/2| \end{aligned}$$

De même pour l'accélération, nous avons :

$$\|\vec{a}_{n/r}\|^2 = a^2\ddot{\theta}^4 \sin^4 \theta + a^2\dot{\theta}^4 \cos^2 \theta = a^2\dot{\theta}^4$$

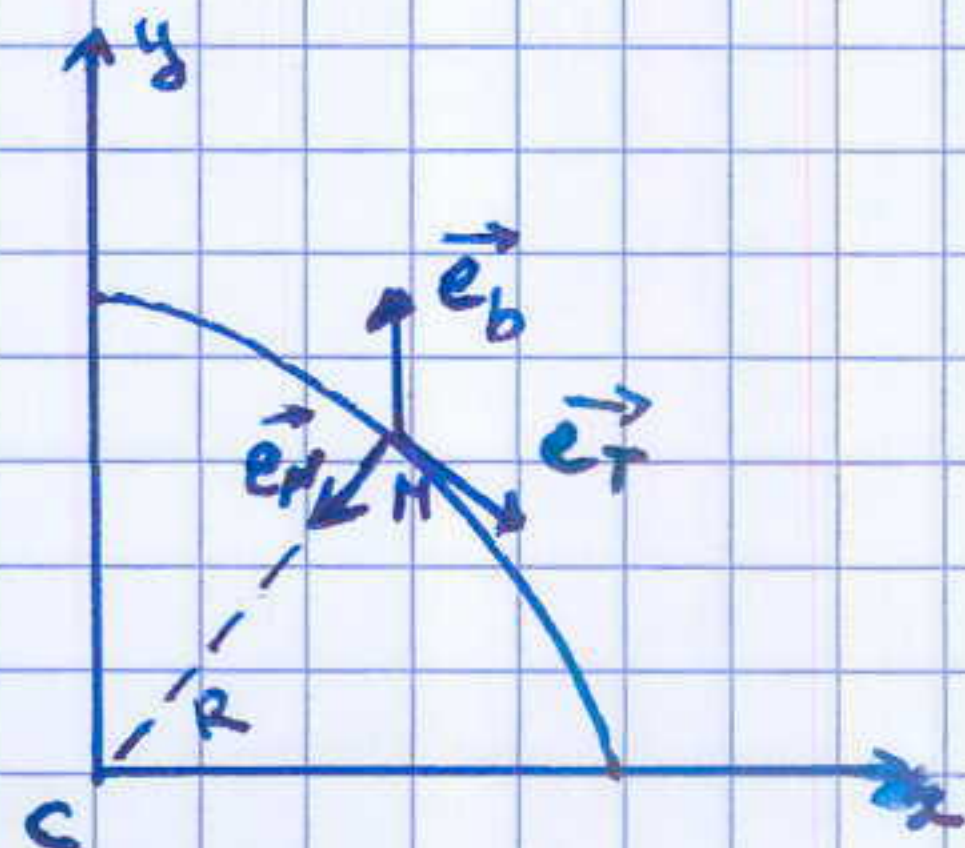
soit $\|\vec{a}_{n/r}\| = a\dot{\theta}^2 = a\omega^2$ accélération de norme constante



5) Les données dans la base de Frenet sont :

$$C\vec{r} = ds ; \quad \frac{dC\vec{r}}{ds} = \vec{e}_T ; \quad \frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{\vec{e}_N}{R}$$

$\vec{e}_T$ vecteur tangent à la trajectoire
 $\vec{e}_N$ vecteur normal à la trajectoire
 $\vec{e}_b$ vecteur binormal



Donc $\vec{v}_n = \frac{d\vec{cr}}{dt} = \frac{d\vec{cr}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{e}_T \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \vec{e}_T$

soit $\vec{v}_n = v \vec{e}_T = 2V_0 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \vec{e}_T$

$\vec{a}_n = a_T \cdot \vec{e}_T + a_N \cdot \vec{e}_N = \frac{d\vec{v}_n}{dt}$

soit $\vec{a}_n = \frac{d}{dt} (v \cdot \vec{e}_T) = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + v \frac{d\vec{e}_T}{dt}$

$\vec{a}_n = \underbrace{\frac{dv}{dt} \vec{e}_T}_{a_T} + v \cdot \underbrace{\frac{1}{R} \vec{e}_N}_{a_N}$ donc $\begin{cases} a_T = dv/dt = d\|\vec{v}_n\|/dt \\ a_N = v^2/R \end{cases}$

on appelle a_N l'accélération normale et a_T l'accélération tangentielle.

Donc $a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(2V_0 \cos \frac{\theta}{2} \right) = \frac{2V_0}{2} \dot{\theta} \left(-\sin \frac{\theta}{2} \right) = -V_0 \dot{\theta} \sin \frac{\theta}{2} = -V_0 \omega \sin \frac{\omega t}{2}$

$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{4V_0^2 \cos^2 \theta/2}{R} = \frac{4V_0^2 \cos^2 \omega t/2}{R}$

on peut donc écrire $\|\vec{a}_n\|^2 = a_N^2 + a_T^2$
 $= \left(-V_0 \dot{\theta} \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 + \left(\frac{4V_0^2 \cos^2 \theta/2}{R} \right)^2$

$\|\vec{a}_n\|^2 = V_0^2 \omega^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2} + \frac{16V_0^4 \cos^4 \omega t/2}{R^2}$

or nous avons vu précédemment que $\|\vec{a}_n\| = a \omega^2$ dans R^* donc

$\|\vec{a}_n\|^2 = a^2 \omega^4 = V_0^2 \omega^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2} + \frac{16V_0^4 \cos^4 \omega t/2}{R^2}$ or $V_0 = a \dot{\theta} = a \omega$
 $V_0^2 = a^2 \omega^2$

$R^2 a^2 \omega^4 = R^2 a^2 \omega^4 \sin^2 \frac{\omega t}{2} + 16V_0^4 \cos^4 \omega t/2$

soit $R^2 = \frac{16V_0^4 \cos^4 \omega t/2}{a^2 \omega^4 - a^2 \omega^4 \sin^2 \frac{\omega t}{2}} = \frac{16a^4 \omega^4 \cos^4 \omega t/2}{a^2 \omega^4 (1 - \sin^2 \frac{\omega t}{2})}$

ce qui donne
$$R^2 = \frac{16a^2 \cos^4 \frac{\omega t}{2}}{(1 - \sin^2 \frac{\omega t}{2})^2} = \frac{16a^2 \cos^4 \frac{\omega t}{2}}{\cos^2 \frac{\omega t}{2}}$$

donc
$$R = 4a \left| \cos \frac{\omega t}{2} \right|$$

Exercice 4: Mouvement d'une masselotte sur une tige.

- repère d'observation $R(O, xyz)$; base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- repère lié à la tige $R'(O, x'y'z')$; base cartésienne $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$.

a) on nous demande d'exprimer $\vec{OA}$ en fonction de r et θ_0 dans B' et R'

c'est à dire
$$\vec{OA} = OA_x(r, \theta_0) \vec{e}_{x'} + OA_y(r, \theta_0) \vec{e}_{y'} + OA_z(r, \theta_0) \vec{e}_{z'}.$$

on a $\vec{OA} = r \vec{e}_r$ dans la base cylindrique et $\vec{e}_r = \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + \cos \theta_0 \vec{e}_{z'}$

soit
$$\vec{OA} = r \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + r \cos \theta_0 \vec{e}_{z'} = \begin{pmatrix} r \sin \theta_0 \\ \phi \\ r \cos \theta_0 \end{pmatrix}_{B'}$$

• on nous demande ensuite d'exprimer la vitesse de A dans R' , soit $\vec{v}_{A/R'}$ dans la base B' , soit
$$\vec{v}_{A/R'} = v_x \vec{e}_{x'} + v_y \vec{e}_{y'} + v_z \vec{e}_{z'}; \text{ ou}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{A/R'} &= \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R'} = \frac{d}{dt} (r \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + r \cos \theta_0 \vec{e}_{z'}) \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \right)_{R'} \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + r \left(\frac{d \sin \theta_0}{dt} \right)_{R'} \vec{e}_{x'} + r \sin \theta_0 \left(\frac{d \vec{e}_{x'}}{dt} \right)_{R'} \\ &\quad + \left(\frac{dr}{dt} \right)_{R'} \cos \theta_0 \vec{e}_{z'} + r \left(\frac{d \cos \theta_0}{dt} \right)_{R'} \vec{e}_{z'} + r \cos \theta_0 \left(\frac{d \vec{e}_{z'}}{dt} \right)_{R'} \\ &= \dot{r} \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + r \dot{\theta}_0 \cos \theta_0 \vec{e}_{x'} + \phi \\ &\quad + \dot{r} \cos \theta_0 \vec{e}_{z'} + (-r \dot{\theta}_0 \sin \theta_0) \vec{e}_{z'} + \phi \end{aligned}$$

soit
$$\vec{v}_{A/R'} = \dot{r} \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + r \dot{\theta}_0 \cos \theta_0 \vec{e}_{x'} + r \cos \theta_0 \vec{e}_{z'} - r \dot{\theta}_0 \sin \theta_0 \vec{e}_{z'}$$

à la vitesse angulaire ω_0 donc $\vec{\omega}_0 = \omega_0 = \omega$ donc $\vec{\omega}_0 = \omega \vec{e}_3$

soit

$$\vec{v}_{A/R'} = r \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + r \cos \theta_0 \vec{e}_{z'} = \begin{matrix} r \sin \theta_0 \\ 0 \\ r \cos \theta_0 \end{matrix}_{B'}$$

b) on nous demande de caractériser le repère $R' (O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ par rapport à $R (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

* Les deux origines sont confondues donc $\vec{OO'} = \vec{0}$, soit

$\vec{v}(O', R'/R) = \vec{0}$ pas de translation de R' par rapport à R .

* la base $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ tourne uniformément à la vitesse de rotation ω_0 , donc R' est en rotation par rapport à R : $\vec{\Omega}(R'/R) = \omega_0 \vec{e}_3$

Rappel: le mouvement d'un référentiel R' par rapport à R se décompose en la somme d'une translation de R'/R et d'une rotation de R'/R

c)

Vitesse d'entraînement
Accélération d'entraînement
Accélération de Coriolis

de A dans R par rapport à R' .

$$\vec{v}_e(A, R'/R) = \underbrace{\vec{v}(O', R'/R)}_{\substack{\vec{0} \\ \text{car } O' \text{ et } O \\ \text{confondus}}} + \underbrace{\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OA}}_{\omega_0 \vec{e}_3 \wedge \vec{OA}}$$

$$\text{soit } \vec{v}_e(A, R'/R) = \omega_0 \vec{e}_3 \wedge \vec{OA}$$

$$= \omega_0 \vec{e}_3 \wedge (r \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + r \cos \theta_0 \vec{e}_{z'})$$

$$= r \omega_0 \sin \theta_0 (\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_{x'}) + r \omega_0 \cos \theta_0 (\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_{z'})$$

$$= r \omega_0 \sin \theta_0 \vec{e}_{y'}$$

$\underbrace{\phantom{r \omega_0 \cos \theta_0 (\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_{z'})}}_{\vec{0}}$

Done

$$\vec{v}_e(A, R'/R) = r\omega_0 \sin \theta_0 \vec{e}_y'$$

Accélération :

$$\begin{aligned} \vec{a}(A, R'/R) &= \left(\frac{d\vec{v}_A}{dt} \right) = \frac{d\vec{v}(A, R'/R)}{dt} + \frac{d\vec{v}_e(A, R'/R)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (\dot{x}_A \vec{e}_x' + \dot{y}_A \vec{e}_y' + \dot{z}_A \vec{e}_z') + \frac{d\vec{v}(O', R'/R)}{dt} + \frac{d}{dt} (\vec{\Omega} \wedge \vec{OA}) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \vec{a}(A, R'/R) &= \left(\frac{d\dot{x}_A}{dt} \vec{e}_x' + \frac{d\dot{y}_A}{dt} \vec{e}_y' + \frac{d\dot{z}_A}{dt} \vec{e}_z' \right) + \dot{x}_A \frac{d\vec{e}_x'}{dt} + \dot{y}_A \frac{d\vec{e}_y'}{dt} + \dot{z}_A \frac{d\vec{e}_z'}{dt} \\ &\quad + \frac{d\vec{v}(O', R'/R)}{dt} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OA} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{OA}}{dt} \\ &= a(O', R'/R) + \dot{x}_A (\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_x') + \dot{y}_A (\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_y') + \dot{z}_A (\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_z') \\ &\quad + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OA} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d}{dt} (r\vec{e}_r) \\ &= a(O', R'/R) + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{A/R'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OA} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{NR'} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OA}) \\ &= a(O', R'/R) + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OA} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OA})}_{\vec{a}_e(A, R'/R) \text{ entraînement}} + \underbrace{2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{NR'}}_{\vec{a}_c(A, R'/R) \text{ Coriolis}} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \vec{a}_e(A, R'/R) &= a(O', R'/R) + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt}}_{\emptyset} \wedge \vec{OA} + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OA})}_{(\omega_0 \vec{e}_z) \wedge (\omega_0 \vec{e}_z \wedge \vec{OA})} \\ &= r\omega_0^2 \vec{e}_z \wedge (\vec{e}_z \wedge \sin \theta_0 \vec{e}_x') \end{aligned}$$

soit

$$\vec{a}_e(A, R'/R) = r\omega_0^2 \sin \theta_0 \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x'$$

$$\vec{a}_e(A, R'/R) = -r\omega_0^2 \sin \theta_0 \vec{e}_x'$$

et

$$\vec{a}_c(A, R'/R) = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(A/R')$$

$$= 2\omega_0 \vec{e}_z \wedge (r \sin \theta_0 \vec{e}_x' + r \cos \theta_0 \vec{e}_y')$$

soit

$$\vec{a}_c(A, R'/R) = 2r\omega_0 \sin \theta_0 \vec{e}_y'$$

$$\begin{aligned}
 \vec{v}(A/R) &= \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_R = \dot{r} \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + r \sin \theta_0 \left[\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right]_R + \dot{r} \cos \theta_0 \vec{e}_z \\
 &= \dot{r} \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + r \sin \theta_0 [\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_{x'}] + \dot{r} \cos \theta_0 \vec{e}_z \\
 &= \dot{r} \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + r \sin \theta_0 [\omega_0 \vec{e}_z \wedge \vec{e}_{x'}] + \dot{r} \cos \theta_0 \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\vec{v}_{A/R} = \dot{r} \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + r \omega_0 \sin \theta_0 \vec{e}_{y'} + \dot{r} \cos \theta_0 \vec{e}_z}$

Donc $\vec{v}_{A/R} = \vec{v}(A/R') + \vec{v}_e(A, R'/R)$

$$= (\dot{r} \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + \dot{r} \cos \theta_0 \vec{e}_z) + (r \omega_0 \sin \theta_0 \vec{e}_{y'})$$

d'où $\boxed{\vec{v}_{A/R} = \dot{r} \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + r \omega_0 \sin \theta_0 \vec{e}_{y'} + \dot{r} \cos \theta_0 \vec{e}_z}$

$$\begin{aligned}
 \vec{a}(A/R) &= \left(\frac{d\vec{v}(A/R)}{dt} \right)_R = \ddot{r} \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + \dot{r} \sin \theta_0 \left(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right)_R \\
 &\quad + \dot{r} \omega_0 \sin \theta_0 \vec{e}_{y'} + r \omega_0 \sin \theta_0 \left(\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} \right)_R \\
 &\quad + \ddot{r} \cos \theta_0 \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

soit $\vec{a}(A/R) = \ddot{r} \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + \dot{r} \sin \theta_0 (\omega_0 \vec{e}_z \wedge \vec{e}_{x'})$

$$+ \dot{r} \omega_0 \sin \theta_0 \vec{e}_{y'} + r \omega_0 \sin \theta_0 (\omega_0 \vec{e}_z \wedge \vec{e}_{y'})$$

$$+ \ddot{r} \cos \theta_0 \vec{e}_z$$

donc $\boxed{\vec{a}(A/R) = (\ddot{r} \sin \theta_0 - r \omega_0^2 \sin \theta_0) \vec{e}_{x'} + 2\dot{r} \omega_0 \sin \theta_0 \vec{e}_{y'} + \ddot{r} \cos \theta_0 \vec{e}_z}$

Donc $\vec{a}(A/R) = \vec{a}(A/R') + \vec{a}_e(A, R'/R) + \vec{a}_c(A, R'/R)$

$$= \ddot{r} (\sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + \cos \theta_0 \vec{e}_z) - r \omega_0^2 \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + 2\omega_0 \dot{r} \sin \theta_0 \vec{e}_{y'}$$

d'où $\boxed{\vec{a}(A/R) = (\ddot{r} \sin \theta_0 - r \omega_0^2 \sin \theta_0) \vec{e}_{x'} + 2\dot{r} \omega_0 \sin \theta_0 \vec{e}_{y'} + \ddot{r} \cos \theta_0 \vec{e}_z}$