Université Paul Sabatier Toulouse III

UFR PCA

L1 SDI

Travaux dirigés de mécanique du point

Année 2010-2011

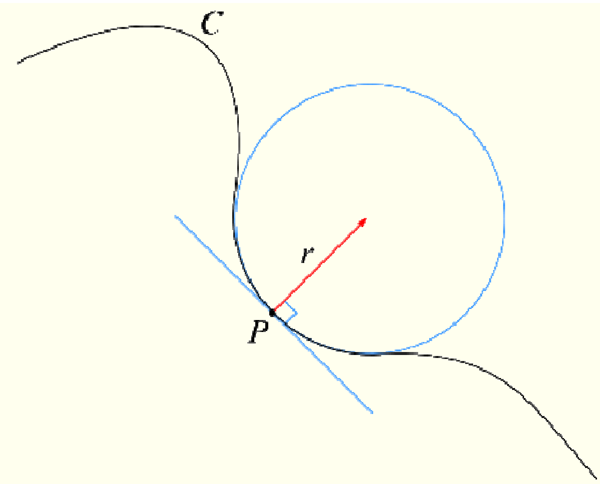
Thème 1 :
Calcul vectoriel, systèmes de coordonnées et dérivation de vecteurs

Nicolas Copernic (1473-1543)

Copernic énonce la théorie selon laquelle le Soleil se trouve au centre de l'univers, et la Terre, que l'on croyait auparavant centrale, tourne autour de lui.

Objectifs :

- Différencier une base et un repère.
- Calculer la norme d'un vecteur, les produits scalaire et vectoriel entre deux vecteurs.
- Définir une base orthonormée.
- Calculer les projections d'un vecteur sur les axes d'un repère orthonormé.
- Définir les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques, intrinsèques.
- Calculer les dérivées d'un vecteur de base et d'un vecteur quelconque dans un repère donné.



Tangente et cercle de courbure en un point P de la courbe C

Questionnaire :

1. Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$:

- ○ Est un vecteur perpendiculaire au plan constitué par les deux vecteurs.
- ○ Est un nombre sans dimensions.
- ○ Est fonction de $\cos\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.
- ○ Est fonction de $\sin\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.
- ○ Aucune réponse n'est correcte.

2. Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$:

- ○ Est un vecteur perpendiculaire au plan constitué par les deux vecteurs.
- ○ Est un nombre sans dimensions.
- ○ Est fonction de $\cos\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.
- ○ Est fonction de $\sin\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.
- ○ Aucune réponse n'est correcte.

3. Concernant le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

- ○ Si $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, alors les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.
- ○ Si $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, alors les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.
- ○ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ est caractéristique du périmètre du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- ○ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ est caractéristique de la surface du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- ○ Aucune réponse n'est correcte

4. Concernant le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

- ○ Si $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, alors, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.
- ○ Si $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, alors les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.
- ○ $\vec{a}\times\vec{b}$ est caractéristique du périmètre du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- ○ $\vec{a}\times\vec{b}$ est caractéristique de la surface du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- ○ Aucune réponse n'est correcte

Exercices :

Exercice 1 : Produits de vecteurs

Soit les trois vecteurs: $\vec{a}(1,2,2)$, $\vec{b}(2,2\sqrt{2},2)$ et $\vec{c}(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$.

a) **Calculer** $\|\vec{a}\|, \|\vec{b}\|, \|\vec{c}\|$, et en déduire les expressions des vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_a}$, $\overrightarrow{e_b}$, $\overrightarrow{e_c}$ des directions de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

b) En considérant les angles θ_a , θ_b et θ_c compris entre 0 et π, **calculer** :

$$\cos\theta_a = \cos\left(\overrightarrow{e_b},\overrightarrow{e_c}\right),\ \cos\theta_b = \cos\left(\overrightarrow{e_a},\overrightarrow{e_c}\right)\ \text{et}\ \cos\theta_c = \cos\left(\overrightarrow{e_b},\overrightarrow{e_a}\right).$$

c) **Calculer** les composantes des vecteurs $\overrightarrow{u_a} = \overrightarrow{e_b}\times\overrightarrow{e_c}$, $\overrightarrow{u_b} = \overrightarrow{e_c}\times\overrightarrow{e_a}$ et $\overrightarrow{u_c} = \overrightarrow{e_a}\times\overrightarrow{e_b}$.

d) **En déduire** $\sin\theta_a$, $\sin\theta_b$ et $\sin\theta_c$. **Vérifier** ces résultats à l'aide de la question b).

e) **Montrer** que $\overrightarrow{u_a}$, $\overrightarrow{u_b}$, $\overrightarrow{u_c}$ peuvent constituer une base. Cette base est-elle normée?

Exercice 2 : Dérivation des vecteurs unitaires

Dans le repère cartésien R $\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, un point P se déplace dans le plan $\left(xOy\right)$. Ses coordonnées polaires sont ρ et φ.

a) **Calculer** $\left[\dfrac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi}\right]_R$ et $\left[\dfrac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}\right]_R$ en projection dans la base cartésienne B liée à R .

b) **En déduire** les expressions de ces dérivés vectorielles dans la base cylindrique B_{cyl} .

c) φ étant fonction du temps, **calculer** à l'aide de la question précédente les expressions de $\left[\dfrac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right]_R$ et $\left[\dfrac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right]_R$ dans B_{cyl} en fonction de $\dfrac{d\varphi}{dt}$.

d) **Démontrer** que de façon générale, la dérivée de tout vecteur unitaire n'a pas de composante sur lui-même.

e) **Montrer** qu'il existe un vecteur $\vec{\Omega}$ tel que :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right]_R = \vec{\Omega}\times\overrightarrow{e_\rho}, \qquad \left[\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right]_R = \vec{\Omega}\times\overrightarrow{e_\varphi}, \qquad \left[\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right]_R = \vec{\Omega}\times\overrightarrow{e_z}$$

En déterminer les composantes. Ce vecteur est le vecteur rotation du repère cylindrique R_{cyl} par rapport à R .

f) Pourquoi $\left[\dfrac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right]_{R_{cyl}} = \vec{0}$ et $\left[\dfrac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right]_{R_{cyl}} = \vec{0}$?

g) **Calculer** $\left[\dfrac{d\overrightarrow{e_x}}{dt}\right]_{R_{cyl}}$ et $\left[\dfrac{d\overrightarrow{e_y}}{dt}\right]_{R_{cyl}}$ en projection sur B_{cyl} , puis en projection sur B .

Exercice 3 : Vecteur vitesse

Le point P est mobile par rapport au référentiel cartésien $\mathcal{R}$ $\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$: ses coordonnées cartésiennes (x,y,z) et cylindriques (ρ,φ,z) sont fonction du temps.

a) **Exprimer** $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}}$, en projection dans $\mathcal{B}$ liée à $\mathcal{R}$ en fonction de x, y et z.

b) A partir de cette expression, **écrire** $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}}$ dans $\mathcal{B}_{cyl}$ en fonction de ρ, $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$, φ, $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ et z. Pour cela on **exprimera** x, y et z en fonction de ρ, φ et z puis $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ en fonction de $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\varphi}$ et $\overrightarrow{e_z}$.

c) **Retrouver** ce résultat directement à partir de l'expression de $\overrightarrow{OP}$ dans $\mathcal{B}_{cyl}$.

d) **Calculer** directement $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_{cyl}}$ dans $\mathcal{B}_{cyl}$.

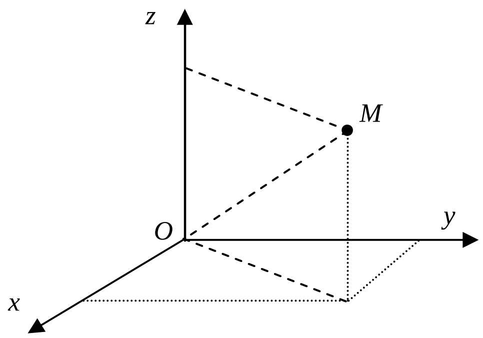
ANNEXES

Thème 1 : Calcul vectoriel, systèmes de coordonnées et dérivation de vecteurs

Exercice 1 : Système de coordonnées

Cet exercice très important est d'avantage une question de cours déguisée qu'un véritable exercice. Il faut donc savoir le faire cours fermé !

O étant l'origine d'un repère cartésien $R\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, la position d'un point M de l'espace est définie par le vecteur position $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$.



La position de ce point M peut être caractérisée par différents triplets de nombres :

- le triplet cartésien : x, y, z
- le triplet cylindrique : ρ, φ, z

a) **Positionner** sur un schéma semblable à celui ci-dessus les vecteurs $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$, $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$.

b) **Rajouter** les 6 grandeurs x, y , z, r, ρ et φ. **Préciser** la dimension physique de chacune d'elles ainsi que leur domaine de variation respectif.

c) **Donner** les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en projection sur $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ d'une part, et en projection sur $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\varphi}$ et $\overrightarrow{e_z}$ d'autre part.

d) **Exprimer** ρ, φ, r en fonction de x, y et z.

e) On considère le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{r}$. **Donner** les composantes de ce vecteur dans le repère cartésien à l'aide des variables x, y et z et dans le repère cylindrique à l'aide des variables ρ, φ et z.

f) **En déduire** à l'aide des variables x, y et z d'une part et des variables ρ, φ et z d'autre part, les expressions du volume élémentaire $\mathrm{d}V$ et du travail élémentaire δW pour une force de type $\vec{F}=k\vec{r}$, où k est une constante.

Exercice 2 : Dérivation

Soit le repère orthonormé cartésien $R\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$ associé à la base B , dans lequel la position d'un point M de l'espace est défini par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$. On définit alors le repère cylindrique $R_{cyl}\left(O,B_{cyl}\right)$ associé à la base orthonormée $B_{cyl}=\left(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\overrightarrow{e_z}\right)$.

a) **Exprimer** le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans B .

b) **Exprimer** le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans B_{cyl} .

c) **Calculer** la vitesse du point M par rapport au référentiel cartésien R : $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{R}}$.

Exprimer le résultat dans B et dans B_{cyl}.

d) **Calculer** la vitesse du point M par rapport au référentiel cylindrique $\mathrm{R_C}$: $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{R}_{cyl}}$. Exprimer le résultat dans B et dans B_{cyl}.

Thème 2 : Cinématique du point

Exercice 1 : Mouvement circulaire uniforme

Dans le repère R $\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, un point P a pour coordonnées polaires ρ et φ, telles que $\rho = 2A\cos\dfrac{\omega t}{2}$ avec $\varphi = \dfrac{\omega t}{2}$, où A et ω sont des constantes positives, et $\varphi \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

a) **Ecrire** les équations polaires et cartésiennes de la trajectoire. Tracer celle-ci.

b) **Calculer** dans la base cylindrique $R_{cyl} = \left(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\overrightarrow{e_z}\right)$, les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{P/R}}$ et du vecteur accélération $\overrightarrow{a_{P/R}}$ en fonction de φ et ω.

c) **Indiquer** la nature du mouvement.

d) Soit le point $I\left(A,0,0\right)$. **Calculer** les composantes de $\overrightarrow{IP}$ en fonction du temps. **En déduire** la relation qui lie $\overrightarrow{a_{P/R}}$ et $\overrightarrow{IP}$. **Commenter** ce résultat.

Eléments de réponse :

a) $\rho = 2A\cos\varphi$; $\left(x-A\right)^2 + y^2 = A^2$

b) $\overrightarrow{v_{P/R}} = A\omega\left(-\sin\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\overrightarrow{e_\varphi}\right)$; $\overrightarrow{a_{P/R}} = -A\omega^2\left(\cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \sin\varphi\overrightarrow{e_\varphi}\right)$

c) *mouvement circulaire uniforme*

d) $\overrightarrow{IP} = A\left(\cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \sin\varphi\overrightarrow{e_\varphi}\right)$; *l'accélération est normale et centripète comme dans tout mouvement circulaire uniforme*

Exercice 2 : Mouvement en spirale

Dans le plan $\left(xOy\right)$ d'un repère R $\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, le mouvement d'un point P est décrit par la variation de ses coordonnées cartésiennes en fonction du temps t :

$x = b\mathrm{e}^{-kt}\cos kt$; $y = b\mathrm{e}^{-kt}\sin kt$, où b et k sont deux constantes positives.

a) 1- **Déterminer** en fonction de t les coordonnées polaires ρ et φ de P.

2- **En déduire** l'équation polaire de la trajectoire de P.

3- **Représenter** la trajectoire.

b) 1- **Déterminer** en fonction de *t* les composantes polaires du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{P/R}}$.

2- **En déduire** l'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{v_{P/R}}\right)$.

3- **Indiquer** la nature du mouvement (uniforme, accéléré ou retardé).

c) 1- **Déterminer** en fonction de *t* les composantes polaires du vecteur accélération $\overrightarrow{a_{P/R}}$.

2- **Préciser** la direction de $\overrightarrow{a_{P/R}}$ et représenter ce vecteur sur la figure.

d) 1- **Déterminer** en fonction de *t* les composantes tangentielle et normale de $\overrightarrow{a_{P/R}}$.

2- **En déduire** la valeur du rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 3 : Mouvement hélicoïdal

Un point matériel *M* décrit, par rapport à un repère R $\left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$, une trajectoire définie par les équations paramétriques :

$$x = b\sin\omega t\,,\; y = b\left(1-\cos\omega t\right) \text{ et } z = \omega t\text{, où } b \text{ et } \omega \text{ constantes positives.}$$

a) **Donner** les coordonnées polaires ρ et φ de *H*, projeté orthogonal de *M* dans $\left(xOy\right)$.

b) Quels sont la trajectoire et le mouvement, par rapport à R, de *H* ?

c) **Donner** les composantes cartésiennes, cylindriques et intrinsèques des vecteurs vitesse et accélération du point *M* par rapport à R.

Eléments de réponse :

a) *mouvement circulaire uniforme (v=ωb) de centre (O, b)*

b) $\rho = 2b\sin\dfrac{\omega t}{2}$ *et* $\varphi = \dfrac{\omega t}{2}$

c) *1-* $\overrightarrow{v_{M/R}} = b\omega\cos\omega t\,\overrightarrow{e_x} + b\omega\sin\omega t\,\overrightarrow{e_y} + b\omega\overrightarrow{e_z}$ *;* $\overrightarrow{a_{M/R}} = -b\omega^2\sin\omega t\,\overrightarrow{e_x} + b\omega^2\cos\omega t\,\overrightarrow{e_y}$

2- $\overrightarrow{v_{M/R}} = b\omega\cos\dfrac{\omega t}{2}\overrightarrow{e_\rho} + b\omega\sin\dfrac{\omega t}{2}\overrightarrow{e_\varphi} + b\omega\overrightarrow{e_z}$ *;* $\overrightarrow{a_{M/R}} = -b\omega^2\sin\dfrac{\omega t}{2}\overrightarrow{e_\rho} + b\omega^2\cos\dfrac{\omega t}{2}\overrightarrow{e_\varphi}$

3- $\overrightarrow{v_{M/R}} = \sqrt{2}\left(b\omega\right)\overrightarrow{e_t}$ *;* $\overrightarrow{a_{M/R}} = b\omega^2\overrightarrow{e_n}$

Exercice 4 : Manège du "service à thé"

Sur le plateau $(\mathcal{P})$ d'un manège (plateforme circulaire de centre *O* et de rayon *R*), on a installé un disque $(\mathcal{D})$, de centre *C* et de rayon $r < R$, sur la circonférence duquel est fixé un siège, repéré par le point *M*.

Le plateau $(\mathcal{P})$ du manège tourne avec une vitesse angulaire constante Ω autour de son axe vertical ascendant *Oz*, par rapport à son bâti, auquel est associé le référentiel galiléen $\mathcal{R}\ \left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$.

Le disque $(\mathcal{D})$ a, par rapport au plateau $(\mathcal{P})$, un mouvement de rotation uniforme, de vitesse ω autour de l'axe de révolution *Cz*.

On définit les référentiels $\mathcal{R}_P\ \left(O,\vec{e_{x'}},\vec{e_{y'}},\vec{e_z}\right)$ lié à $(\mathcal{P})$, et $\mathcal{R}_D\ \left(O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_z}\right)$ lié au siège *M* de $(\mathcal{D})$, avec $\left(\widehat{\vec{e_x},\vec{e_{x'}}}\right)=\Omega\, t$ et $\left(\widehat{\vec{e_{x'}},\vec{e_1}}\right)=\omega\, t$.

On pose $\overrightarrow{OC}=L\,\vec{e_x'}$ ($L<R$ constant) et $\overrightarrow{CM}=r\,\vec{e_1}$.

a) **Définir** les vecteurs rotation $\vec{\Omega}\left(\mathcal{R}_P/\mathcal{R}\right)$, $\vec{\Omega}\left(\mathcal{R}_D/\mathcal{R}_P\right)$ et $\vec{\Omega}\left(\mathcal{R}_D/\mathcal{R}\right)$.

b) **Calculer** indépendamment les unes des autres, les vitesses $\vec{V}\left(M/\mathcal{R}_P\right)$, $\vec{V_e}\left(M,\mathcal{R}_P/\mathcal{R}\right)$ et $\vec{V}\left(M/\mathcal{R}\right)$. **Vérifier** la loi de composition des vitesses.

c) **Calculer** indépendamment les unes des autres, les accélérations $\vec{a}\left(M/\mathcal{R}_P\right)$, $\vec{a_e}\left(M,\mathcal{R}_P/\mathcal{R}\right)$, $\vec{a_c}\left(M,\mathcal{R}_P/\mathcal{R}\right)$ et $\vec{a}\left(M/\mathcal{R}\right)$. **Vérifier** la loi de composition des accélérations.

Thème 3 : Dynamique du point

Exercice 1 : Mouvement rectiligne

Un point *A*, de masse *m* et repéré par sa coordonnée *x*, est astreint à se déplacer sur l'axe *Ox* d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}\ \left(O,xyz\right)$. Il est soumis, dans la direction $\left(Ox\right)$, à la force $\vec{F}=-\lambda m\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e_x}$, où λ est une constante positive. A l'instant $t=0$, *A* se trouve en *O* et possède le vecteur vitesse $\vec{v_o}=v_o\vec{e_x}$ avec $v_o>0$.

a) **Déterminer** l'équation horaire $x(t)$ du mouvement.

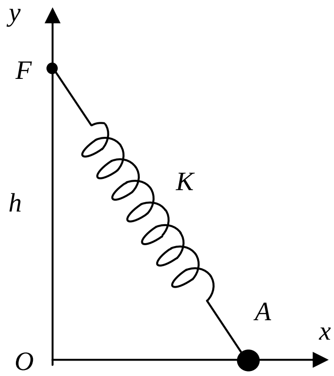
b) **Tracer** le graphe de $x(t)$ et décrire le mouvement.

Réponse : $x(t)=\dfrac{v_o}{\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})\rightarrow$ *existence de* $x_{\lim}=\dfrac{v_o}{\lambda}$ *(cf. texte 2 du 1^er^ semestre).*

Thème 4 : Energétique

Exercice 1 : Effet non linéaire sur un pendule élastique vertical

Une masselotte *A*, de masse *m*, coulisse sans frottement sur une tige horizontale *Ox*. Elle est soumise à l'action d'un ressort, de raideur *K* et de longueur à vide l_o, dont l'extrémité fixe *F* est située à une distance *h* de la tige (Figure ci-contre).



On désigne par *x* l'abscisse de *A* sur la tige, comptée à partir de *O*, projection de *F* sur l'axe associé à la tige.

On étudie le mouvement de *A* par rapport au référentiel $\mathcal{R} = (Oxyz)$ que l'on supposera galiléen.

a) **Réaliser** le bilan des forces s'exerçant sur *A*. Les **exprimer** dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

b) **Montrer** que l'expression de l'énergie potentielle de *A* est :

$\varepsilon_p(x) = K\left[\frac{x^2}{2} - l_o(x^2+h^2)^{1/2} + l_o h\right]$ si l'origine des énergies potentielles est choisie en $x = 0$.

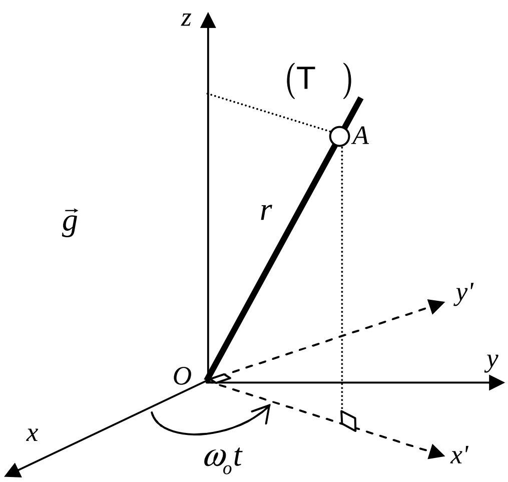
c) Que devient $\varepsilon_p(x)$ lorsque $h = 0$? Quelle est alors l'équation différentielle en *x* décrivant le mouvement de *A* ? N'a-t-on pas affaire ainsi à un oscillateur harmonique ? **Calculer** sa fréquence propre sachant que $K = 400$ N .m^{-1} et $m = 0{,}1$ kg.

d) Pour *h* quelconque, **étudier** la fonction $\varepsilon_p(x)$, puis tracer le graphe correspondant. Quelles sont les positions d'équilibre stables x_e?
Application numérique : **calculer** x_e dans le cas où $h = 10$ cm et $l_o = 15$ cm.

e) A partir du développement au second degré de $\varepsilon_p(x)$ autour de $x = x_e$, **trouver**, à l'aide du théorème de l'énergie mécanique, l'expression de la pulsation des petits mouvements autour des positions d'équilibre stable. **Calculer** la fréquence de ces oscillations avec les données de la question c).

Exercice 2 : Mouvement dans un référentiel non galiléen

Une masselotte *A*, de masse *m*, peut coulisser sans frottements, sur une tige $(\mathcal{T})$. On note *r* la distance *OA* entre l'extrémité de la tige et la masselotte *A* considérée comme ponctuelle.
Cette tige, inclinée de l'angle θ_o par rapport à l'axe *Oz* du repère galiléen $\mathcal{R}\ (O, xyz)$, tourne uniformément à la vitesse angulaire ω_o autour de *Oz*.



On note $\mathcal{R}'(O,x'y'z')$ le repère orthonormé direct lié à la tige, et indiqué sur la figure ci-contre.

A l'instant initial, *A* est lâché sans vitesse initiale à la distance r_o et l'on cherche à étudier le mouvement ultérieur de *A* dans $\mathcal{R}'$.

a) **Effectuer** le bilan des forces qui s'exercent sur *A*.

b) **Calculer** l'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement (on prendra l'origine de l'énergie potentielle en *O*).

c) **En déduire** l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(r)$.

d) **Déterminer** la position d'équilibre r_e de l'anneau et discuter de sa stabilité.

e) **Donner** l'allure de la courbe $E_p(r)$. Selon la valeur de r_o par rapport à r_e, discuter des différents mouvements possibles de *A* sur la tige une fois qu'il est lâché.

Thème 5 : Oscillateurs

Exercice 1 : Le pendule simple

Un pendule simple est constitué d'une bille d'acier de masse $m = 50$ g suspendue à un fil de longueur $L = 2$ m. On l'écarte de 4° de sa position d'équilibre puis on la lâche sans vitesse initiale.

1) **Etablir** l'équation différentielle du mouvement de la masse si les frottements sont négligeables. En déduire la période de l'oscillation.

Elément de réponse : $T_0 = 2.84$ s

2) **Montrer** que la période a bien la dimension d'un temps.

3) Que vaudrait la période si on avait écarté le pendule de 8° ?

Donnée : $g = 9.81\ N.kg^{-1}$

Exercice 2 : Le pendule élastique

Un solide *(S)*, de masse *m*, pouvant coulisser sans frottement sur un rail horizontal, est fixé à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable. L'autre extrémité du ressort est accrochée à un point fixe. On repère la position de *(S)* par l'abscisse *x(t)* de son centre de gravité, choisie nulle lorsque le système est au repos. Ainsi, *x(t)* est directement l'écart à l'équilibre.

1) **Etablir** l'équation différentielle du mouvement du solide *(S)*.

2) On écarte le pendule élastique défini précédemment de $x_o = 10$ cm avant de le lâcher sans vitesse initiale. **Déterminer** l'expression de *x(t)*.

Elément de réponse : $x(t) = 0.1\cos(22.4\,t)$

Données : $m = 100$ g ; $k = 50\ N.m^{-1}$