

TDA MECANIQUE

Exercice 1: Produits de vecteurs

$$\vec{a}(1, 2, 2) \quad \vec{b}(2, 2\sqrt{2}, 2) \quad \text{et} \quad \vec{c}(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

a) par définition $\|\vec{a}\| = (a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z)^{1/2}$

soit $\|\vec{a}\| = 3$; $\|\vec{b}\| = 4$ et $\|\vec{c}\| = 2$

Le vecteur unitaire est défini par $\|\vec{e}\| = 1$ soit $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

on trouve alors

$$\vec{e}_a = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

b) Par définition $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

donc

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

soit $\cos \theta_a = \frac{\vec{e}_b \cdot \vec{e}_c}{\|\vec{e}_b\| \cdot \|\vec{e}_c\|} = \frac{1/2 + \sqrt{2}/4}{1 \times 1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ soit $\theta_a = 31,4^\circ$

$$\cos \theta_b = \frac{\vec{e}_a \cdot \vec{e}_c}{\|\vec{e}_a\| \cdot \|\vec{e}_c\|} = \frac{\sqrt{2}/3 + \sqrt{2}/3}{1 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$
 soit $\theta_b = 19,5^\circ$

$$\cos \theta_c = \frac{\vec{e}_b \cdot \vec{e}_a}{\|\vec{e}_b\| \cdot \|\vec{e}_a\|} = \frac{1/2 \times 1/3 + \sqrt{2}/2 \times 2/3 + 1/2 \times 2/3}{1 \times 1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}$$
 soit $\theta_c = 13,7^\circ$

c) $\vec{u}_a = \vec{e}_b \wedge \vec{e}_c$

$$= \begin{vmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{vmatrix}_B \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{vmatrix}_B = \begin{vmatrix} 1/2 - \sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 \end{vmatrix}_B$$

soit

$$\vec{u}_a = \begin{vmatrix} 1/2 - \sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 \end{vmatrix}_B$$

$\vec{u}_b = \vec{e}_c \wedge \vec{e}_a$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{vmatrix}_B \wedge \begin{vmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{vmatrix}_B = \begin{vmatrix} \sqrt{2}/3 - \sqrt{2}/3 \\ +\sqrt{2}/6 \\ -\sqrt{2}/6 \end{vmatrix}_B$$

soit

$$\vec{u}_b = \begin{vmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/6 \\ -\sqrt{2}/6 \end{vmatrix}_B$$

$\vec{u}_c = \vec{e}_a \wedge \vec{e}_b$

$$= \begin{vmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{vmatrix}_B \wedge \begin{vmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{vmatrix}_B = \begin{vmatrix} 1/3 - \sqrt{2}/3 \\ 1/3 - 1/6 \\ \sqrt{2}/6 - 2/6 \end{vmatrix}_B$$

soit

$$\vec{u}_c = \begin{vmatrix} 1/3 - \sqrt{2}/3 \\ 1/6 \\ \sqrt{2}/6 - 1/3 \end{vmatrix}_B$$

Rappel:

$$\begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix}_B \wedge \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix}_B = \begin{vmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{vmatrix}_B$$

d) Par définition $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$

donc $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

on retrouve

$$\begin{aligned} \sin \theta_a &= 0,52 \\ \sin \theta_b &= 0,33 \\ \sin \theta_c &= 0,59 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \theta_a &= 31,4^\circ \\ \theta_b &= 19,5^\circ \\ \theta_c &= 13,7^\circ \end{aligned}$$

e) Une base $B(\vec{u}_a, \vec{u}_b, \vec{u}_c)$ est une base si

- $(\vec{u}_a \wedge \vec{u}_b) \wedge \vec{u}_c \neq 0$ vecteurs non coplanaires.
- $\vec{u}_a, \vec{u}_b, \vec{u}_c$ non nuls

la base est normée si $(\vec{u}_a \wedge \vec{u}_b) \cdot \vec{u}_c = 1$

$$\cdot \vec{u}_a \wedge \vec{u}_b = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{vmatrix}_B \wedge \begin{vmatrix} \phi \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{vmatrix}_B = \begin{vmatrix} \phi \\ \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{12} \\ \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{12} \end{vmatrix}_B$$

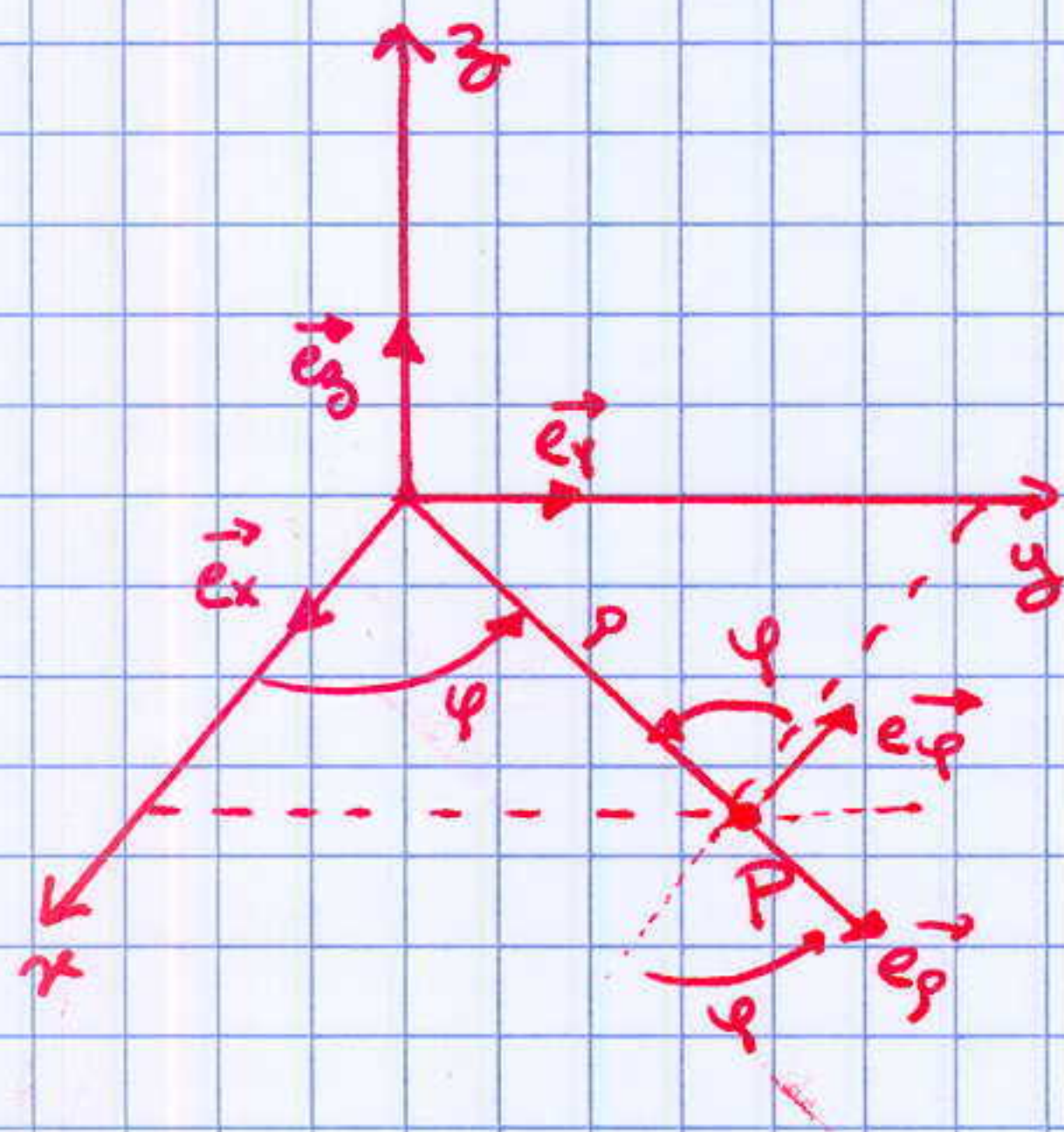
$$\cdot (\vec{u}_a \wedge \vec{u}_b) \wedge \vec{u}_c = \begin{vmatrix} \phi \\ \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{12} \\ \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{12} \end{vmatrix}_B \wedge \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3} \end{vmatrix}_B = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{18} + \frac{5}{72} \\ \frac{\sqrt{2}}{18} - \frac{1}{12} \\ \frac{\sqrt{2}}{18} - \frac{1}{12} \end{vmatrix}_B$$

Donc $(\vec{u}_a, \vec{u}_b, \vec{u}_c)$ forme une base.

$$\cdot (\vec{u}_a \wedge \vec{u}_b) \cdot \vec{u}_c = \left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{12}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{36} + \frac{1}{24}$$

Donc $(\vec{u}_a, \vec{u}_b, \vec{u}_c)$ n'est pas normée.

Exercice 2 : Derivation des vecteurs unitaires.



• $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ base cartésienne.

• $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi)$ base cylindrique $\vec{e}_\rho \perp \vec{e}_\phi$

• $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ fixes dans la base cartésienne mais pas $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\phi$ qui sont en mouvement, attachés au point M.

la projection de $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\phi$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ revient à écrire

$$\vec{e}_\rho = A \vec{e}_x + B \vec{e}_y + C \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\phi = A' \vec{e}_x + B' \vec{e}_y + C' \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$$

donc

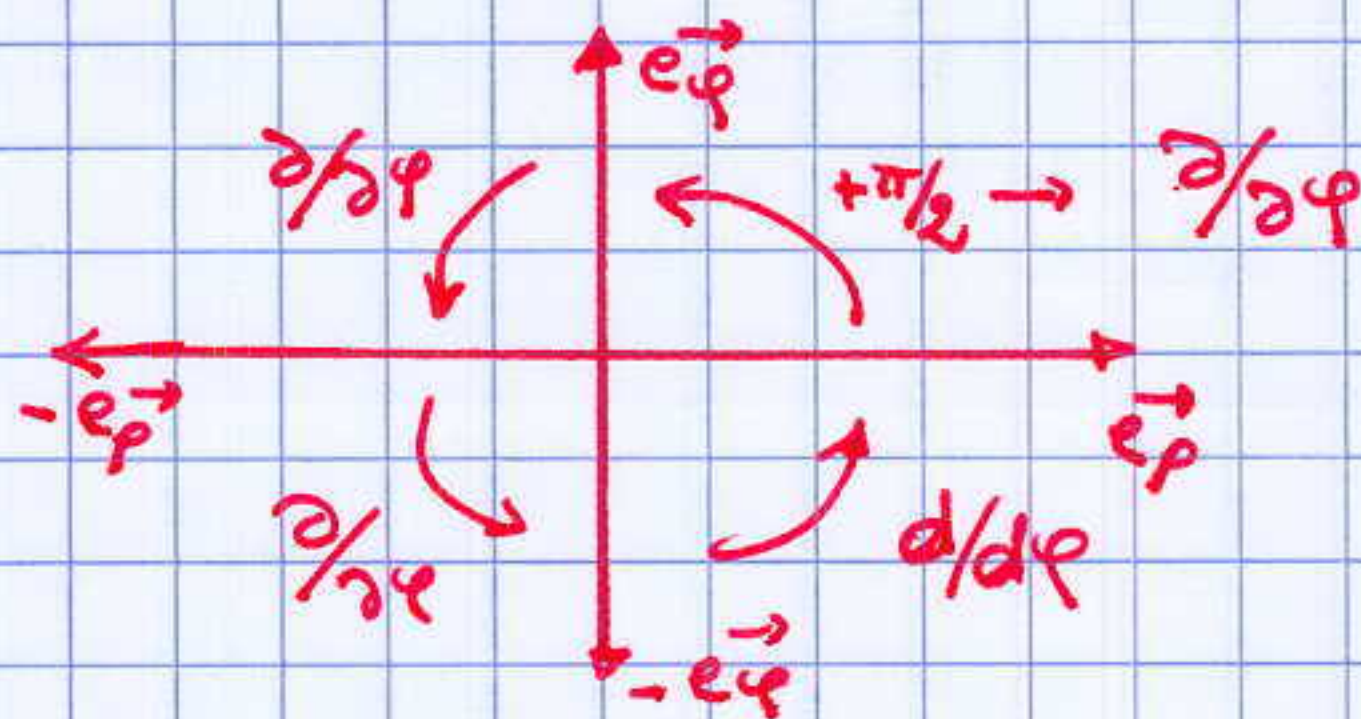
$$\vec{e}_\rho = \begin{vmatrix} 1 \\ \varphi \\ \varphi \end{vmatrix}_{\text{Bxyz}} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \varphi \end{vmatrix}_{\text{Bca}} \quad \text{et} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{vmatrix} \varphi \\ 1 \\ \varphi \end{vmatrix}_{\text{Bxyz}} = \begin{vmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \varphi \end{vmatrix}_{\text{Bca}}$$

Donc

$$\left(\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} \right)_R = \begin{vmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \varphi \end{vmatrix}_{\text{Bca}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \right)_R = \begin{vmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ \varphi \end{vmatrix}_{\text{Bca}}$$

d'où

$$\left(\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} \right)_R = \vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \right)_R = -\vec{e}_\rho$$



b) on a trouvé que $\left(\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} \right) = \vec{e}_\varphi$ et $\left(\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} \right) = -\vec{e}_\rho$. Ecrite dans la base cylindrique revient à écrire tout vecteur $\vec{V} = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\varphi \vec{e}_\varphi + V_z \vec{e}_z$

donc

$$\left(\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} \right)_{\text{Bxyz}} = \begin{vmatrix} \varphi \\ 1 \\ \varphi \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \right)_{\text{Bxyz}} = \begin{vmatrix} \varphi-1 \\ +\varphi \\ \varphi \end{vmatrix}$$

c) $\varphi = \varphi(t)$ donc $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$ sont fonctions de $\varphi(t)$.

$$\left(\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} \right)_R \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_R = \vec{e}_\varphi \cdot \dot{\varphi} \quad \text{soit}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \right)_R = \begin{vmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \varphi \end{vmatrix}_{\text{Bxyz}}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \right)_R \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_R = -\vec{e}_\rho \cdot \dot{\varphi} \quad \text{soit}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \right)_R = \begin{vmatrix} -\dot{\varphi} \\ \varphi \\ \varphi \end{vmatrix}_{\text{Bxyz}}$$

d) Appelons $\vec{e}(t)$ un vecteur unitaire, on a donc

$$\frac{d}{dt} \|\vec{e}(t)\|^2 = \frac{d}{dt} [\vec{e}(t) \cdot \vec{e}(t)] = \frac{d\vec{e}(t)}{dt} \cdot \vec{e}(t) + \vec{e}(t) \cdot \frac{d\vec{e}(t)}{dt}$$

$$\text{donc } \frac{d}{dt} \|\vec{e}(t)\|^2 = 2 \cdot \vec{e}(t) \cdot \frac{d\vec{e}(t)}{dt}$$

Le vecteur étant unitaire $\|\vec{e}(t)\| = 1$ donc $\frac{d}{dt} \|\vec{e}(t)\|^2 = 0$

$$\text{d'où } \vec{e}(t) \cdot \frac{d\vec{e}(t)}{dt} = 0$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{e}(t) \perp \frac{d\vec{e}(t)}{dt}}$$

e) Nous venons de voir que

$$\left(\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right)_R = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right)_R = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho$$

$$\text{d'où } \left(\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right)_R = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = \dot{\varphi} (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho) = \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \underline{\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right)_R = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho = -\dot{\varphi} (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho) = +\dot{\varphi} (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\varphi) = \underline{\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_R = 0 = \dot{\varphi} (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_z) = \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = \underline{\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_z}$$

on peut donc définir

$$\boxed{\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z = \begin{vmatrix} \phi \\ \phi \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix}_{\text{Bcyl}}}$$

f) Dans la base cylindrique, les vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$ sont fixes dans le repère cylindrique et mobile dans le repère R.

$$\left(\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right)_{\text{Bcyl}} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right)_{\text{Bcyl}} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right)_R = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad ; \quad \left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right)_R = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho \quad ; \quad \left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_R = 0$$

g) Pour calculer $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{\text{Rcyl}}$ et $\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{\text{Rcyl}}$ il faut d'abord exprimer les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ dans le repère cylindrique, c'est-à-dire dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

$$\begin{aligned} \bullet \vec{e}_x &= \cos\varphi \vec{e}_\rho - \sin\varphi \vec{e}_\varphi \\ \bullet \vec{e}_y &= \sin\varphi \vec{e}_\rho + \cos\varphi \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

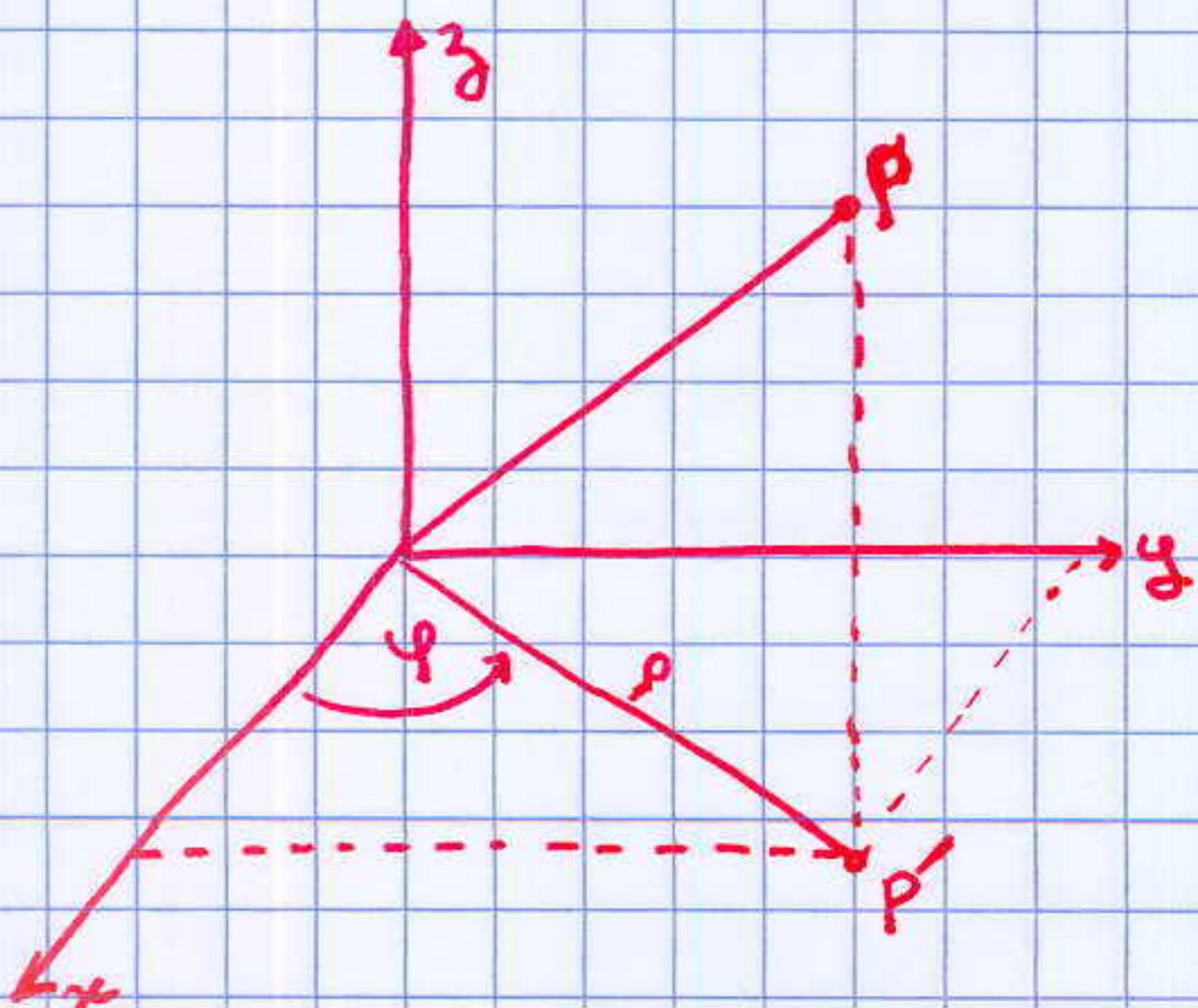
$$\text{Donc } \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{\text{Rcyl}} = \left(\frac{d\vec{e}_x}{d\varphi}\right)_{\text{Rcyl}} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = -\dot{\varphi} \sin\varphi \vec{e}_\rho - \dot{\varphi} \cos\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{\text{Rcyl}} = \left(\frac{d\vec{e}_y}{d\varphi}\right)_{\text{Rcyl}} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \dot{\varphi} \cos\varphi \vec{e}_\rho - \dot{\varphi} \sin\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\text{d'où } \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{\text{Rcyl}} = \begin{vmatrix} -\dot{\varphi} \sin\varphi \\ -\dot{\varphi} \cos\varphi \\ \emptyset \end{vmatrix}_{\text{Rcyl}} ; \left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{\text{Rcyl}} = \begin{vmatrix} \dot{\varphi} \cos\varphi \\ -\dot{\varphi} \sin\varphi \\ \emptyset \end{vmatrix}_{\text{Rcyl}}$$

Au passage, on peut remarquer que $\left(\frac{d\vec{e}_x}{d\varphi}\right)_{\text{Rcyl}} = -\vec{e}_y$ et $\left(\frac{d\vec{e}_y}{d\varphi}\right)_{\text{Rcyl}} = \vec{e}_x$

Exercice 3 : Vecteur Vitesse



$$\bullet R(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

$$\bullet \text{Base Cartésienne } (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

$$\bullet \text{Base cylindrique } (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$$

$$\vec{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{OP} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}_{\text{Bas}}$$

a) Dans le repère R , et la base cartésienne, nous avons

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{OP}}{dt}\right)_R &= \frac{d}{dt} \left(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_R \vec{e}_x + x \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_R \\ &\quad + \left(\frac{dy}{dt}\right)_R \vec{e}_y + y \left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_R \\ &\quad + \left(\frac{dz}{dt}\right)_R \vec{e}_z + z \left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_R\end{aligned}$$

or $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ fixes donc $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_R = \vec{0}$

soit $\boxed{\left(\frac{d\vec{OP}}{dt}\right)_R = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z}$

b) On nous demande cette fois-ci d'exprimer non seulement $\left(\frac{d\vec{OP}}{dt}\right)_R$ dans la base cylindrique mais aussi en fonction de (ρ, φ, z) .

$$\begin{aligned}(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) &\longrightarrow (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z) \\ (x, y, z) &\longrightarrow (\rho, \varphi, z)\end{aligned}$$

on veut $\left(\frac{d\vec{OP}}{dt}\right)_R = A(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\rho + B(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\varphi + C(\rho, \varphi, z)\vec{e}_z$

soit $\vec{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ avec

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

et $\begin{cases} \vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$

$$\text{d'où } \left(\frac{dx}{dt} \right)_R = \frac{d}{dt} \left(\rho \cos \varphi \right)_R = \frac{d\rho}{dt} \cdot \cos \varphi + \rho \left(-\sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)_R = \frac{d}{dt} \left(\rho \sin \varphi \right)_R = \frac{d\rho}{dt} \cdot \sin \varphi + \rho \left(\cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)_R = \frac{d}{dt} (z)_R = \dot{z}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_R &= \left[\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi \right] \cdot \left[\cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \right] \\ &+ \left[\dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi \right] \cdot \left[\sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi \right] \\ &+ \dot{z} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_R &= \dot{\rho} \cos^2 \varphi \vec{e}_\rho - \dot{\rho} \cos \varphi \sin \varphi \vec{e}_\varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \sin^2 \varphi \vec{e}_\varphi \\ &+ \dot{\rho} \sin^2 \varphi \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \sin \varphi \cos \varphi \vec{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \cos^2 \varphi \vec{e}_\varphi \\ &+ \dot{z} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_R = \vec{e}_\rho (\dot{\rho} + \rho \dot{\varphi}) + \vec{e}_\varphi (\rho \dot{\varphi} + \dot{\rho}) + \dot{z} \vec{e}_z$$

$$\text{d'où } \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_R = \begin{vmatrix} \dot{\rho} \\ \rho \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{vmatrix}_{\text{B cyl}}$$

c) Par définition, nous devons écrire $\vec{OP}$ dans la base cylindrique, c'est à dire

$$\vec{OP} = \begin{vmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{vmatrix}_{\text{B cyl}} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

$$\text{donc } \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_R = \frac{d}{dt} (\rho \vec{e}_\rho) + \frac{d}{dt} (z \vec{e}_z) = \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_R \vec{e}_\rho + \rho \left(\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \right)_R + \left(\frac{dz}{dt} \right)_R \vec{e}_z + z \left(\frac{d\vec{e}_z}{dt} \right)_R$$

R

$\emptyset$ car $\vec{e}_z$ est fixe dans R

Dans R, le vecteur $\vec{e}_\varphi$ est mobile et dépend de $\varphi(t)$. Nous avons déjà démontré que

$$\left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\right)_R \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{OP}}{dt}\right)_R &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z \\ &= \begin{vmatrix} \dot{\rho} \\ \rho \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{vmatrix}_{\text{Bcyl}} \end{aligned}$$

d) Directement dans la base cylindrique et le repère cylindrique, nous avons

$$\vec{OP} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \quad \text{avec } \vec{e}_\rho \text{ et } \vec{e}_z \text{ fixes dans Rcyl.}$$

donc

$$\left(\frac{d\vec{OP}}{dt}\right)_{\text{Rcyl}} = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\text{Rcyl}} \vec{e}_\rho + \underbrace{\rho \left(\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right)_{\text{Rcyl}}}_{\emptyset} + \left(\frac{dz}{dt}\right)_{\text{Rcyl}} \vec{e}_z + \underbrace{z \left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_{\text{Rcyl}}}_{\emptyset}$$

soit

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{OP}}{dt}\right)_{\text{Rcyl}} &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{z} \vec{e}_z \\ &= \begin{vmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{z} \end{vmatrix}_{\text{Bcyl}} \end{aligned}$$