COURS

LA MECANIQUE DU POINT

Sommaire

1. ***Cinématique***
   - I. Introduction
   - II. Repère d'espace et de temps
     - 1.1.1 Relativité du mouvement
     - 1.1.2 Repère de temps
     - 1.1.3 Repère d'espace
     - 1.1.4 Coordonnées cylindriques et sphériques
     - 1.1.5 Changement de coordonnées
     - 1.1.6 Base de Frenet, abscisse curviligne
   - III. Vitesse et accélération d'un point par rapport à n référentiel
     - i. Vecteur vitesse
     - ii. Vecteur accélération
     - b. Exemples de mouvements
       - i. Mouvement rectiligne
       - ii. Mouvement uniforme
       - iii. Mouvement circulaire
     - c. Composition des mouvements
       - i. Changement de référentiels
       - ii. Référentiels en translation
       - iii. Référentiels en rotation
       - iv. Loi de compositions des mouvements

2. ***Dynamique***
   - 2.1

3. ***Energétique***
   - 1.Introduction
   - 2.Travail d'une force
     - 3.2.1 Définition
     - 3.2.2 Travail moteur, travail résistant
     - 3.2.3 Exemple de calcul de travail : le travail du poids
     - 3.2.4 Exemple de calcul de travail : le travail de la force de gravitation
     - 3.2.5 Exemple de calcul de travail : le travail de la réaction d'un support
   - 3.Energie potentielle
     - 3.3.1 Relation entre travail d'une force conservative et énergie potentielle
     - 3.3.2 Relation entre force conservative et énergie potentielle
     - 3.3.3 Energie potentielle de pesanteur
     - 3.3.4 Energie potentielle de gravitation
     - 3.3.5 Energie potentielle élastique
   - 4.Energie cinétique
     - 3.4.1 Théorème de l'énergie cinétique
     - 3.4.2 Puissance instantanée
   - 5.Energie mécanique
     - 3.5.1 Energie mécanique d'un point matériel soumis à une force conservative
     - 3.5.2 Théorème de l'énergie mécanique
     - 3.5.3 Exemple d'application du théorème de l'énergie mécanique
     - 3.5.4 Stabilité d'un système, position équilibre

CHAPITRE 1 :

INTRODUCTION

A LA

MECANIQUE DU POINT

- ***BUT DU CHAPITRE***
- ***SOMMAIRE DE CE CHAPITRE***

I – LA MECANIQUE CLASSIQUE

Mécanique : comme nom, utilisé depuis la Renaissance qui a emprunté le mot au latin *mecanica* pris dans le sens scientifique du grec *mêkhanikê* (sous entendu teckhnê), 'art' de construire une machine. Le mot est attesté en français dès 1559 pour désigner la partie des mathématiques qui a pour objet la connaissance des lois du mouvement et la théorie de l'action des machines.

La mécanique est la science du mouvement. Elle a pour but de décrire, d'analyser et de prévoir la nature des mouvements des corps quelque soit la nature des interactions qui s'exercent entre eux. Son but est donc de décrire et de comprendre le monde naturel qui nous entoure en essayant de trouver des règles de fonctionnement. Comprendre pour comprendre et comprendre pour anticiper, pour fabriquer de nouveaux outils, pour une amélioration matérielle de la vie quotidienne. Dans le but de trouver les lois gouvernant les différentes modifications que peut subir un corps au fur et à mesure que le temps s'écoule, nous devons être capables de décrire le changement le plus simple que l'on puisse observer pour un corps : la modification apparente de sa position avec le temps, ce que nous appelons le mouvement.

Un corps est en mouvement s'il subit au cours du temps des modifications de sa position.

Si le corps est de faible dimension par rapport à ses variations de position, on peut assimiler le mouvement du corps au mouvement d'un seul de ses points, par exemple son centre. On parle alors de mécanique du point. Si le corps est de plus grande dimension, son mouvement ne peut plus être analysé comme étant le mouvement d'un seul point. Cette partie de la mécanique s'appelle la mécanique du solide.

Si l'objet est un liquide, on parlera de mécanique des fluides. Ces trois domaines interdépendants décrivent un monde sensible, celui que nous appréhendons tous les jours : ils forment ***la mécanique classique***. Mais à des échelles auxquelles la perception humaine est perdue, il faut introduire, et ce fut fait au début du 20ème siècle, ***la mécanique quantique*** (pour les mouvements à l'échelle atomique) et la mécanique relativiste (pour les vitesses proches de la vitesse de la lumière).

Il existe alors d'autres types de mécanique :

- la mécanique des fluides qui s'intéresse aux mouvements des gaz et des liquides ;
- la mécanique céleste qui décrit et prévoit le mouvement des astres ;
- la mécanique quantique concerne les atomes, les molécules et les corps infiniment petits
- la mécanique relativiste qui ne s'applique qu'à des corps se déplaçant à très grande vitesse (proche de celle de la lumière).

Dans ce cours de mécanique du point, nous nous intéresserons à des objets qui font partie de notre monde sensible et dont les vitesses sont petites par rapport à celle de la lumière. Les fondements de cette mécanique dite classique ont été développés par Isaac Newton (1645-1727) dans son œuvre majeure *Philosophiae naturalis principia mathematica* publiée en 1687. Toutefois beaucoup d'autres physiciens et mathématiciens ont contribué à cette science: Archimède, Galilée, Kepler, Descartes, Huyghens, Laplace, Lagrange, Hamilton, Mach et Einstein.

II – LA MECANIQUE DU POINT

Cette mécanique concerne l'étude d'objets de taille suffisamment petite (par rapport aux distances parcourues) pour pouvoir les assimiler à des points. Par rapport à un solide de taille non ponctuelle (mécanique du solide), cette situation conduit à une étude plus simple puisque l'étude du mouvement de tels objets ne nécessite pas de prendre en compte les phénomènes de rotation de l'objet sur lui-même et qui ont bien sûr une influence sur le comportement du dit-objet lorsqu'il est soumis à une force. Si on voulait être plus précis, on pourrait parler de mécanique du point matériel pour signifier qu'il va s'agir d'étudier le mouvement d'objets ponctuels de par leur taille et dotés d'une masse, donc des objets d'étude bien réels et non d'un point au sens mathématique. On part donc sur une étude simplifiée qui permet de poser des bases de connaissances fondamentales et de raisonnement : un électron ou un satellite, soumis aux forces caractéristiques qui agissent sur eux, seront légitimement assimilés à des points matériels vu les dimensions mises en jeu.

III – LA CINEMATIQUE

La cinématique va décrire l'évolution de la position d'un objet au cours du temps et de sa vitesse mais aussi décrire la trajectoire suivie par cet objet.

La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie le mouvement d'un objet indépendamment des causes qui ont donné naissance à ce mouvement.

La première partie consiste en l'étude du mouvement (Kinema=mouvement) d'un objet indépendamment des causes qui en sont à l'origine (donc les forces et donc la masse n'interviennent pas). Ceci doit donc permettre de connaître à chaque instant la position et la vitesse de l'objet (donc des fonctions de t) mais aussi la trajectoire (indépendante du temps). Cette étude nécessitera donc d'introduire la notion fondamentale de référentiel puisque vous savez bien que la vitesse d'un objet n'a de sens que par rapport à une référence : la vitesse d'un conducteur de voiture est de 80 m.h-1 pour un observateur immobile au bord de la route mais est nulle pour passager qui l'accompagne ou va 800km.h-1 pour l'observateur dans l'avion survolant la route.

Il faudra corrélativement se poser la question de l'existence simultanée de plusieurs référentiels et de leur mouvement relatif (le référentiel de l'observateur au bord de la route et le référentiel du passager par exemple).

A cette notion physique de ***référentiel***, il sera essentiel d'ajouter la notion mathématique de ***repère***. En effet, qui veut décrire une position, une vitesse ou une accélération devra connaître la norme mais aussi la direction de mouvement ainsi que le sens de celui-ci. La notion de vecteur que vous connaissez bien sera là pour intégrer toutes ces informations (vecteur position, vecteur vitesse, vecteur accélération). Or, des vecteurs sont difficilement manipulables. Ce que l'on aime bien, ce sont les relations scalaires (entre nombres) car elles donnent des équations que les mathématiques nous enseignent à résoudre. En projetant les vecteurs sur des bases (ou des repères, on verra la nuance plus tard), une égalité de vecteur conduira à 3 égalités entre nombre (dans le cas d'un mouvement dans les 3 directions de l'espace). Il faudra donc présenter différents types de repères couramment utilisés en mécanique.

IV – LA DYNAMIQUE

Indépendamment des causes signifie indépendamment des forces et donc indépendamment de la masse puisque vous connaissez la relation fondamentale : F = ma. Mais si l'on veut aller plus loin en introduisant les forces qui agissent sur le point (et en mécanique du point, il n'y a que des forces extérieures et forces intérieures), on rentre alors dans la partie dynamique (dynamique car les forces créent de l'accélération qui crée de la dynamique : ça va plus vite, ça ralentit, ..). C'est dans cette partie que l'on sera amené à présenter les lois de Newton et notamment la deuxième loi désormais appelée ***loi fondamentale*** et à parler alors de la différence entre ***un référentiel galiléen et un référentiel non galiléen***.

V – L'ENERGETIQUE

Si l'on souhaite déplacer l'objet, il faut aussi déplacer avec lui les forces qui agissent sur lui lors du déplacement. Par exemple, la force poids : si l'on monte l'objet, cette force s'oppose au mouvement alors que si on le baisse, elle nous aide. Le déplacement s'accompagne donc pour nous déménageur, d'un coût ou d'un gain d'énergie dû au déplacement : le travail de la force en question. Nous verrons alors que l'on peut distinguer deux sortes d'énergies : ***l'énergie cinétique*** (et non pas cinématique : la masse est présente maintenant) et son fameux $1/2mv^2$ que vous connaissez bien généralement et ***l'énergie potentielle***, que vous connaissez aussi mais généralement de façon plus confuse. Ces deux formes d'énergie sont les deux contributions à l'énergie totale que l'on appelle ***l'énergie mécanique.*** Aux énergies cinétique et mécanique sont associées des théorèmes très importants qui sont autant d'outils puissants pour résoudre un problème de mécanique par une autre voie que la loi fondamentale.

CHAPITRE 2 :

LA

CINEMATIQUE

- ***BUT DU CHAPITRE***
- ***SOMMAIRE DE CE CHAPITRE***

I - REPERE D'ESPACE ET DE TEMPS

Un objet est toujours en mouvement par rapport à un autre objet. Le repos (absence de mouvement) et le mouvement sont relatifs au corps qui sert de référence. A ce corps de référence, il faut associer ***un repère d'espace et un repère de temps***. Le corps servant de référence à l'étude du mouvement d'un objet associé à ses deux repères de temps et d'espace est appelé ***le référentiel***. Le choix du référentiel est donc fondamental. Il dépend bien entendu du type de mouvement que l'on étudie.

Tout mouvement se doit d'être décrit par rapport à un référentiel qu'il convient de préciser avant tout.

1.1. Référentiel

Maintenant que l'on sait repérer la position d'un point, se pose la question du référentiel d'observation qui est cruciale si l'on veut décrire le mouvement, c'est-à-dire une position en évolution. Prenons une mouche en vol et une personne sur le lit (expérience de Descartes). Si l'on se place sur le dos de la mouche, on perçoit une mouche immobile et un Descartes en mouvement alors que Descartes est bel est bien immobile sur son lit par rapport aux murs de la chambre. Il bouge par rapport à la mouche, par rapport au soleil. …Donc on ne peut pas chercher à décrire un mouvement si l'on ne sait pas par rapport à quoi on effectue l'observation : c'est-à-dire par rapport à un référentiel ! Il sera donc essentiel de noter $\vec{\upsilon}_{M/référentiel}$ et non $\vec{\upsilon}_M$ pour signaler le référentiel d'observation. La vitesse sera donc une grandeur relative.

- Le mouvement d'une boule de pétanque lancée par un joueur pourra être étudiée dans le référentiel terrestre (lié à la Terre).

- Le mouvement d'un satellite en orbite autour de la Terre pourra être décrit dans le référentiel géocentrique (lié au centre de la Terre et à des étoiles fixes).

- On décrit le mouvement des planètes dans le référentiel héliocentrique (lié au centre du soleil et à des étoiles fixes)

L'ensemble constitué d'un repère de temps et d'un repère d'espace est appelé un référentiel.

Quand est-ce qu'un repère peut aussi servir de référentiel ? Quand les 3 vecteurs unitaires $\vec{e}_i$ qui servent à projeter les autres vecteurs apparaissent fixes au cours du temps pour l'observateur observant la scène depuis ce référentiel.

Enfin, rappelons brièvement que les unités de mesure des longueurs et des durées sont, dans le système international, le mètre et la seconde. La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux premiers sous-niveaux hyperfins de l'été fondamental de l'atome de Césium 133, à la température de 0K. Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $1/C_o$ seconde, où $C_o = 299\ 792\ 458\ m.s^{-1}$.

1.2. Repère de temps

La détermination d'un évènement physique exige non seulement de connaître sa localisation spatiale mais aussi l'instant t auquel il a lieu. On doit donc disposer d'une ***horloge***, phénomène physique régulier permettant de mesurer des durées et de fixer un instant d'origine. Le temps se mesure à l'aide de cette horloge qui définit une échelle des temps. Les horloges comptent les périodes de systèmes physiques qui oscillent : pendule, oscillateur électrique à quartz, système quantique pour les horloges atomiques.

Il est important pour la mesure des temps que toutes les horloges d'un même référentiel soient synchronisées. Le temps associé à un référentiel est unique. L'échelle des temps nécessite de définir une origine qui est la même pour toutes les horloges du référentiel.

Le principe Newtonien d'universalité du temps suppose que le temps est un paramètre universel qui ne dépend pas du choix du référentiel. Il est donc possible de synchroniser toutes les horloges de l'Univers quelque soit le référentiel auxquelles elles appartiennent. ***L'écoulement des durées est, en Mécanique classique, indépendant du repère d'espace choisi et de son mouvement éventuel.***

Le repère de temps est constitué d'un instant d'origine et d'une échelle de temps

1.3. Repère d'espace

Pour faire de la cinématique, il faut tout d'abord savoir repérer l'objet en question dans l'espace. Cela suppose d'avoir un point de référence à partir duquel mesurer la distance qui sépare l'objet de cette référence mais vous conviendrez que cela n'est pas suffisant : si je vous dis qu'un vélo est passé à 30 mètres de l'entrée du RU, vous ne pouvez pas me dire sans équivoque sa position. Il faut en plus repérer ce vélo par rapport à des directions. Il faut en fait introduire la notion de vecteur position, ce qui demande une origine et une base pour projeter ce vecteur. On appelle ***repère*** cet ensemble. (Origine + base).

Pour pouvoir mesurer la position d'un point dans l'espace par rapport à un référentiel donné, il faut repérer la position de ce point par ces ***coordonnées***. L'espace possédant 3 dimensions, trois coordonnées suffisent. A chaque référentiel on associe un repère cartésien $\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$. O est l'origine du repère et $\mathrm{B}_{Ca}=\left(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$ est une base orthonormée directe dont les trois vecteurs unitaires sont fixes pour un observateur lié au référentiel $\Re$. Afin de simplifier les notations, le repère cartésien et le référentiel seront notés indifféremment par $\Re$.

L'ensemble constitué du point O de l'espace et de 3 vecteurs de base forme un repère d'espace.

Fin cours 1

II – VECTEUR POSITION

Nous venons de voir que l'on pouvait maintenant définir les distances et les angles entre directions. On supposera donc que l'espace physique est euclidien : on définit ainsi les distances et les angles entre direction. Pour l'unicité des définitions d'angles, on munira systématiquement cet espace d'une ***base orthonormée directe*** notée $\left(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$, associée au système d'***axes rigides*** (Ox), (Oy), (Oz). Physiquement, le repérage de la position dans

l'espace d'un événement physique impose donc le repérage spatial relativement à l'origine O choisie, par l'abaissement de trois perpendiculaires et les mesures des abscisses x_p, y_p et z_p de leurs intersections avec les axes, au moyen de règles graduées.

2.1. Vecteur position en coordonnées cartésienne

La position d'un point M est repérée par ses coordonnées cartésiennes qui sont notées $M(x,y,z)_{B_{Ca}}$ dans la base cartésienne $\mathrm{B}_{Ca} = \left(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$.

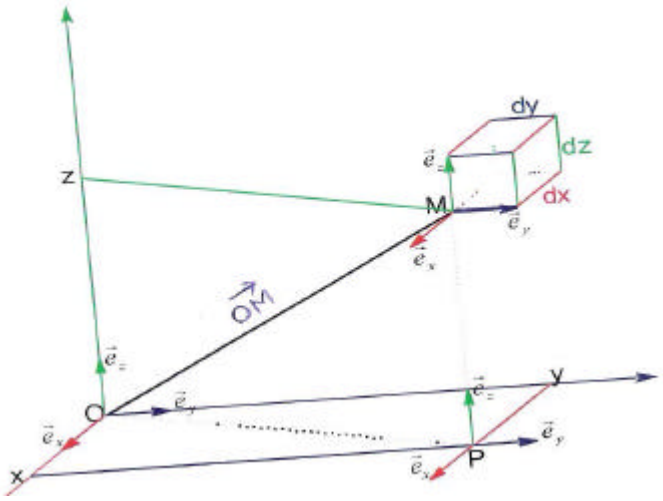


Fig.1 : Coordonnées cartésiennes

La base $\mathrm{B}_{Ca} = \left(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$ ***est une base fixe dans le référentiel*** $\hat{A}$**.**

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit alors dans la base cartésienne :

$$\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{e_x} + y\cdot\vec{e_y} + z\cdot\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} =_{B_{Ca}} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

Lors du mouvement du point M, les coordonnées du point M, c'est-à-dire (x, y, z), vont varier au cours du temps. On note alors $x = f(t)$; $y = g(t)$; $z = h(t)$ les équations cartésiennes paramétriques du mouvement du point M, appelées également ***lois horaires***.

- ***Déplacement élémentaire :*** Le déplacement élémentaire du vecteur position s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = dx\cdot\vec{e_x} + dy\cdot\vec{e_y} + dz\cdot\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad d\overrightarrow{OM} =_{B_{Ca}} \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

- ***Volume élémentaire :*** Le volume élémentaire est alors donné par :

$$d^3V = dx\cdot dy\cdot dz \tag{1.3}$$

2.2. Vecteur position en coordonnées cylindriques

Après le choix d'un axe particularisé (Oz), on remplace les coordonnées cartésiennes (x_M, y_M) par les coordonnées polaires (ρ, φ) de la projection P du point M dans le plan Oxy.

Les coordonnées cylindriques du point M sont :

- ρ = OP (norme, toujours positive),
- φ = $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OP}\right)$ tel que $0 \le j \le 2p$
- Z

La base orthonormée directe cylindrique est formée des trois vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_j}$ et $\overrightarrow{e_z}$. Le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OP}$, le vecteur $\overrightarrow{e_j}$ est normal au plan OPM. La base $B_{cyl} = \left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_z}\right)$ est directe.

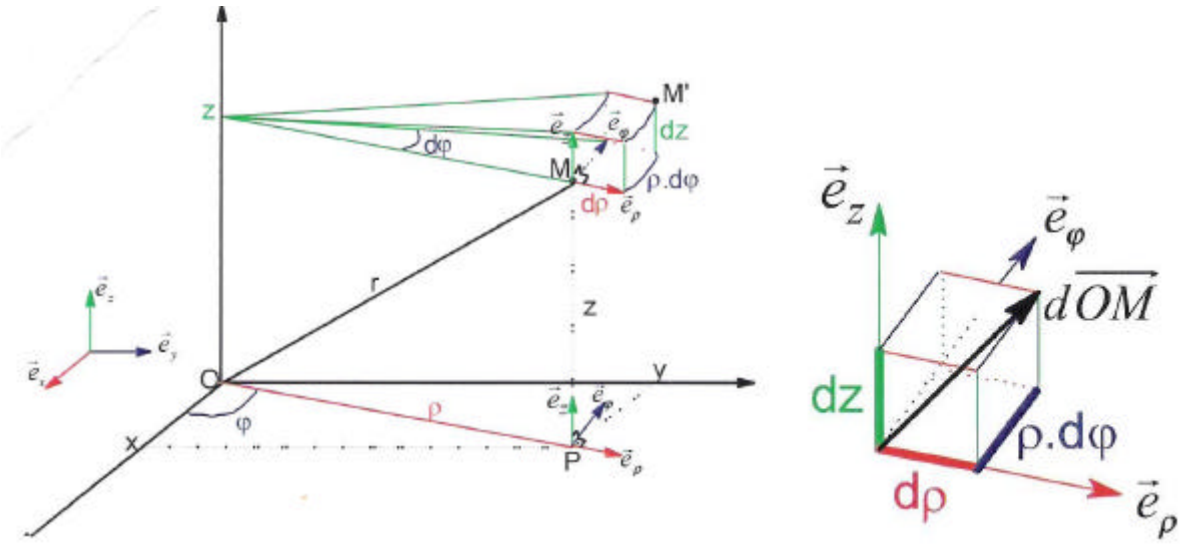


Fig.2 : Coordonnées cylindriques

Pour un observateur lié au référentiel, la base cylindrique qui est définie localement au point M n'est pas fixe. Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_j}$ changent d'orientation quand le point M se déplace vers M'.

La base $B_{cyl} = \left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_z}\right)$ ***est mobile dans le référentiel*** $\hat{A}$.

La position d'un point M est repérée par ses coordonnées cylindriques qui sont notées $M(r, j, z)_{B_{cyl}}$ dans la base B_{Cyl} . Les composantes du vecteur position dans la base cylindrique s'écrivent:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} \\ \rho \cdot \overrightarrow{e_\rho} + z \cdot \overrightarrow{e_z} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} =_{B_{Cyl}} \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \qquad (1.4)$$

Lors du mouvement du point M, les coordonnées du point M, (ρ, φ, z), vont varier au cours du temps. Les expressions $\rho = f(t)$; $\varphi = g(t)$; $z = h(t)$ définissent alors les équations cylindriques paramétriques du mouvement du point M, appelées également ***lois horaires***.

- ***Déplacement élémentaire :*** Le déplacement élémentaire du vecteur position s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot dj \cdot \vec{e}_j + dz \cdot \vec{e}_z \quad \text{ou} \quad d\overrightarrow{OM} =_{B_{Cyl}} \begin{vmatrix} dr \\ r \cdot dj \\ dz \end{vmatrix} \qquad (1.5)$$

- ***Volume élémentaire :*** Le volume élémentaire est alors donné par :

$$d^3V = (dr) \cdot (r \cdot dj) \cdot (dz) \qquad (1.6)$$

Attention : On utilise souvent les notations (r,θ) à la place de (ρ, φ) pour les coordonnées cylindriques. Ces notations peuvent engendrer des confusions avec les coordonnées sphériques.

2.3. Vecteur position en coordonnées sphériques

On remplace encore les coordonnées cylindriques (ρ, φ) par les coordonnées sphériques (ρ, θ). On note P la projection du point M dans le plan Oxy.

Les coordonnées sphériques du point M sont :

- le rayon vecteur r = OM (norme, toujours positive),
- la colatitude $q = \left(\vec{e}_z, \overrightarrow{OM}\right)$ compris entre 0 et π,
- l'azimuth $j = \left(\vec{e}_x, \overrightarrow{OP}\right)$ compris entre 0 et 2π (le même qu'en sphérique)

La base orthonormée directe sphérique est formée des trois vecteurs unitaires $\vec{e}_r$, $\vec{e}_q$ et $\vec{e}_j$. Le vecteur $\vec{e}_r$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, le vecteur $\vec{e}_q$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur $\vec{e}_j$ est normal au plan OPM. La base $B_{Sph} = \left(\vec{e}_r, \vec{e}_q, \vec{e}_j\right)$ est directe.

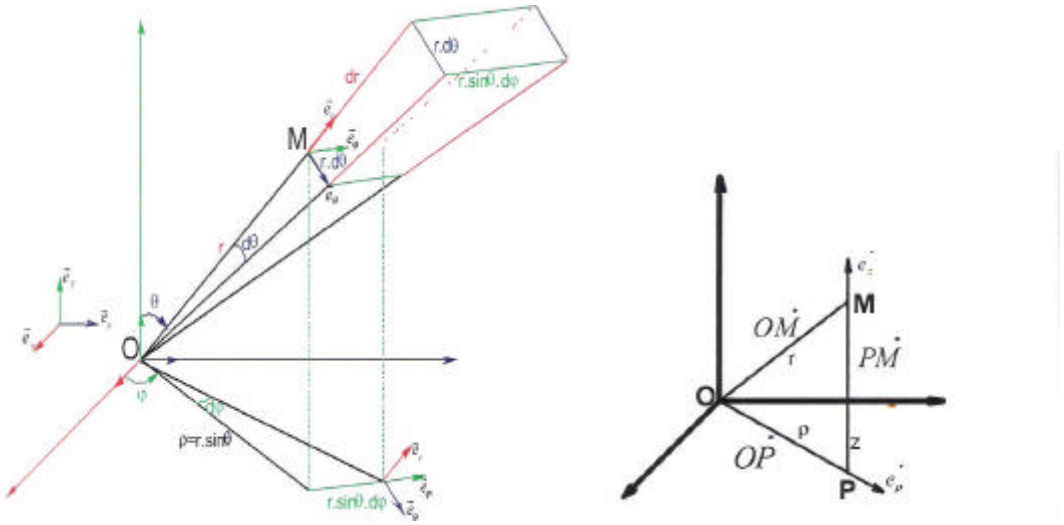


Fig.3 : Coordonnées sphériques

Pour un observateur lié au référentiel, la base sphérique qui est définie localement au point M n'est pas fixe. Les vecteurs unitaires $\vec{e_r}$, $\vec{e_q}$ et $\vec{e_j}$ changent d'orientation quand le point M se déplace.

La base $B_{Sph} = \left(\vec{e_r}, \vec{e_q}, \vec{e_j}\right)$ ***est <u>mobile</u> dans le référentiel*** $\hat{A}$.

La position d'un point M est repérée par ses coordonnées sphériques qui sont notées $M(r,q,j)_{B_{Sph}}$ dans la base B_{Sph}. Les composantes du vecteur position dans la base sphérique s'écrivent:

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{e_r} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{B_{Sph}} \tag{1.7}$$

Lors du mouvement du point M, les coordonnées du point M, (r, θ, φ), vont varier au cours du temps. Les expressions $r = f(t)$; $\theta = g(t)$; $\varphi = h(t)$ définissent alors les équations sphériques paramétriques du mouvement du point M, appelées également ***lois horaires***.

- ***<u>Déplacement élémentaire :</u>*** Le déplacement élémentaire du vecteur position s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = dr \cdot \vec{e_r} + r \cdot dq \cdot \vec{e_q} + r \cdot \sin q \cdot dj \cdot \vec{e_j} \quad \text{ou} \quad d\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} dr \\ r \cdot dq \\ r \cdot \sin q \cdot dj \end{vmatrix}_{B_{Sph}} \tag{1.8}$$

- ***<u>Volume élémentaire :</u>*** Le volume élémentaire est alors donné par :

$$d^3V = (dr) \cdot (r \cdot dq) \cdot (r \cdot \sin q \cdot dj) \tag{1.9}$$

III – CHANGEMENT DE CORDONNEES ET CHOIX DE LA BASE

3.1. Changement de coordonnées

Un problème de mécanique commence toujours par un choix du paramétrage du problème adapté à sa géométrie particulière. Il s'agit de repérer le plus petit nombre de variables indépendantes permettant de décrire complètement le mouvement étudié.

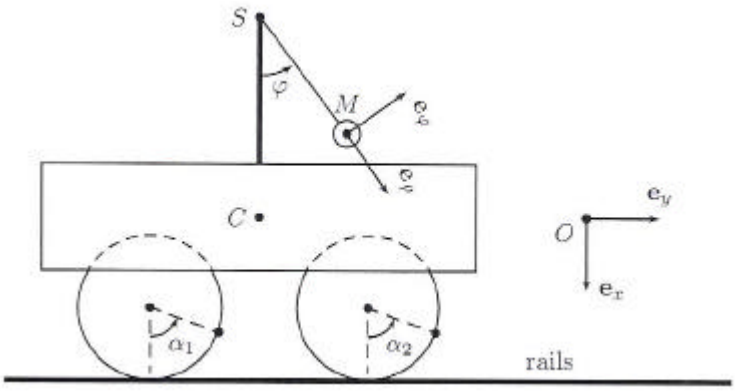


Figure 4 : exemple de mouvement complexe.

La figure 4 montre un exemple de mouvement complexe : un pendule, fixé au mât d'un chariot mobile sur roues. Un tel problème est cinématiquement paramétré par les données des trois angles (pour la rotation des roues et du pendule) et d'une abscisse y_C du centre C du chariot (pour la translation par exemple).

La première étape pour décrire le mouvement d'un point consistera donc à choisir les bonnes coordonnées.

3.1.1 Passage coordonnées cylindriques - coordonnées cartésiennes

D'après la figure (Fig.2), les coordonnées cartésiennes s'expriment en fonction des coordonnées cylindriques par projection, selon les relations :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos j \\ y = r \cdot \sin j \\ z = z \end{cases} \quad \text{et inversement} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ j = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases} \tag{1.10}$$

Rappels : La longueur correspondant à la projection d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur un axe est égale au produit scalaire « du vecteur unitaire de l'axe concerné » avec $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{OM} = \left\|\overrightarrow{e_x}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \cdot \cos\left(\overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{OM}\right) = 1 \cdot r \cdot \cos j$. On peut se rappeler également que la projection d'un vecteur sur un axe forme un triangle rectangle et qu'il suffit alors d'appliquer les relations sinus et cosinus dans ce triangle pour déterminer les longueurs des cotés.

3.1.2. Passage coordonnées sphériques - coordonnées cartésiennes

D'après la figure (Fig.3), les coordonnées cartésiennes s'expriment en fonction des coordonnées sphériques par projection, selon les relations :

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin q \cdot \cos j \\ y = r \cdot \sin q \cdot \sin j \\ z = r \cdot \cos q \end{cases} \quad \text{et inversement} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = a\cos\left(\dfrac{z}{r}\right) \\ \varphi = a\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \tag{1.11}$$

Explications :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} \quad avec \quad \overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} OP \cdot \cos j \\ OP \cdot \sin j \\ 0 \end{vmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{PM} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ r \cdot \cos q \end{vmatrix} \tag{1.12}$$

$$et \quad OP = r \cdot \sin q = r \cdot \cos\left(\frac{p}{2} - q\right) \quad le\ projeté\ de\ OM\ dans\ le\ plan\ Oxy$$

3.2. Choix et changement de la base de projection

La seconde étape pour décrire le mouvement d'un point consistera à choisir la base dans laquelle seront exprimés (projetés) les vecteurs position, vitesse et accélération.

La figure 4 montre que les vecteurs (vitesse, accélération, etc.) peuvent être projetés sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ ou sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_j)$; on écrira ainsi naturellement $\overrightarrow{OC} = y_C \cdot \vec{e}_y$ (avec $y_C<0$ sur la figure), $\overrightarrow{CS} = -h \cdot \vec{e}_x$ mais $\overrightarrow{SM} = \ell \cdot \vec{e}_r$, si ℓ est la longueur du fil du pendule.

Relativement au référentiel R (Oxyz) où les vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de la base sont fixes (indépendant du temps), les coordonnées des points C, S et M s'obtiennent des expressions :

$\overrightarrow{OC} = y_C \cdot \vec{e}_y$,
$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS} = y_C \cdot \vec{e}_y - h \cdot \vec{e}_x$ (où h est constant)
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SM} = y_C \cdot \vec{e}_y - h \cdot \vec{e}_x + \ell \cdot \vec{e}_r$ (ou ℓ est constant).

On voit bien ici que $\overrightarrow{OM}$ possèdent des coordonnées qui dépendent des 3 vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_r$ qui ne forment pas une base. On doit, pour travailler correctement, écrire les vecteurs dans la même base ***dans la même base***. Pour cela, nous devons utiliser des relations de changement de base qui permettent d'écrire les vecteurs $\vec{e}_r = A \cdot \vec{e}_x + B \cdot \vec{e}_y$ et $\vec{e}_j = A \cdot \vec{e}_x + B \cdot \vec{e}_y$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Toutefois, on notera que c'est ***rarement une bonne idée*** de projeter tous les vecteurs rencontrés sur la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, en particulier en présence de mouvement de rotation.

A partir de la figure 5, on obtient les relations suivantes :

$$\overrightarrow{e_r} = \cos j \cdot \vec{e}_x + \sin j \cdot \vec{e}_y \quad ; \quad \overrightarrow{e_j} = -\sin j \cdot \vec{e}_x + \cos j \cdot \vec{e}_y \tag{1.13}$$

Nous voyons donc que les deux vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_j)$ dépendent de la variable j qui elle-même dépend du temps $j(t)$. Par conséquent, la dérivée de ces vecteurs par rapport au temps est non nulle puisque les composantes sont des fonctions du temps : f(j (t)).

Si on s'intéresse aux vitesses, nous avons par dérivation des vecteurs (nous le verrons ensuite) :

$$\overrightarrow{u_{C/R}} = \dot{y}_C \cdot \vec{e}_y \quad ; \quad \overrightarrow{u_{S/R}} = \dot{y}_C \cdot \vec{e}_y$$

Pour $\overrightarrow{u_{M/R}}$ c'est un peu plus compliqué puisque $\overrightarrow{u_{M/R}} = \dot{y}_C \cdot \vec{e}_y + \ell \cdot \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_R$ et que le vecteur $\vec{e}_r$ n'est pas fixe dans le référentiel R(Oxyz). Il en est de même pour le vecteur $\vec{e}_j$.

Exemple : Projection et dérivées des vecteurs unitaires de la base cylindrique :

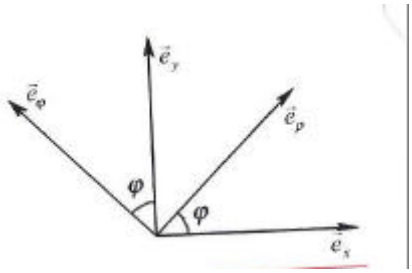


Fig.5 : Vecteurs de la base cylindrique en Coordonnées cartésiennes

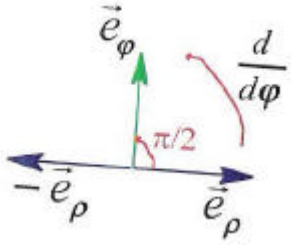


Fig.6 : Dérivées des vecteurs de la base

Connaissant les vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_j)$ exprimés dans la base cartésienne, nous pouvons écrire que :

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{e}_r}{dj}\right)_R = {}_{B_{Ca}}\begin{vmatrix} -\sin j \\ \cos j \\ 0 \end{vmatrix} \\ \left(\frac{d\vec{e}_j}{dj}\right)_R = {}_{B_{Ca}}\begin{vmatrix} -\cos j \\ -\sin j \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{\left(\frac{d\vec{e}_r}{dj}\right)_R = \vec{e}_j \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{e}_j}{dj}\right)_R = -\vec{e}_r} \qquad (1.14)$$

Effectuer la dérivée des vecteurs de la base par rapport à l'angle φ revient donc à faire une rotation de $\frac{p}{2}$ du vecteur dérivé (voir figure 6).

Par conséquent :

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{e}_r}{dj}\right)_R \cdot \left(\frac{dj}{dt}\right)_R = {}_{B_{Ca}}\begin{vmatrix} -\dot{j} \cdot \sin j \\ \dot{j} \cdot \cos j \\ 0 \end{vmatrix} \\ \left(\frac{d\vec{e}_j}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{e}_j}{dj}\right)_R \cdot \left(\frac{dj}{dt}\right)_R = {}_{B_{Ca}}\begin{vmatrix} -\dot{j} \cdot \cos j \\ -\dot{j} \cdot \sin j \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_R = \dot{j} \cdot \vec{e}_j \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{e}_j}{dt}\right)_R = -\dot{j} \cdot \vec{e}_r}$$

On peut donc en conclure que $\overrightarrow{u_{M/R}} = \dot{y}_C \cdot \vec{e}_y + \ell \cdot \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_R$ soit $\overrightarrow{u_{M/R}} = \dot{y}_C \cdot \vec{e}_y + \ell \cdot \dot{j} \cdot \vec{e}_j$ que l'on pourra développer pour l'écrire uniquement dans la base cartésienne ou dans la base cylindrique. Une expression mécanique peut ainsi faire appel à plusieurs bases de projection ; il ne s'agit absolument pas d'un changement de référentiel, qui consiste à changer la liste des axes réputés fixes.

3.3. Changement de référentiel

Le changement de référentiel ne doit en aucun cas être confondu avec les changements de coordonnées du changement de base de projection. Vu de deux référentiels différents, le mouvement d'un même mobile peut être ***complètement différent*** alors que le choix de la base de projection ou des coordonnées n'a pour but que de rendre plus simple la description d'un ***même mouvement***.

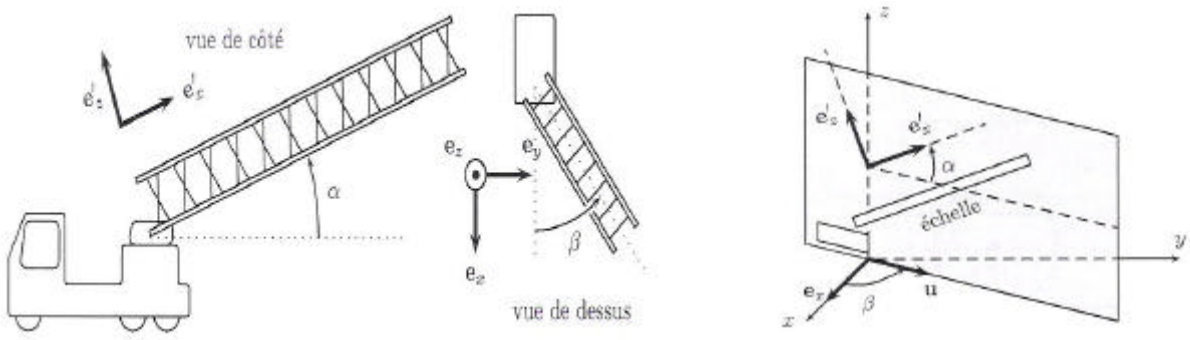


Figure 7 : mouvement relatif de deux référentiels

IV - VITESSE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN REFERENTIEL

4.1. Vitesse moyenne

Habituellement, on parle de vitesse en termes de vitesse moyenne d'un point, c'est-à-dire le rapport entre la distance parcourue par la durée du parcours :

$$u_{moy} = \frac{d}{t} \tag{1.15}$$

Cette définition ne permet pas de connaître la vitesse du point M à tout instant du parcours. On a alors recours à la ***vitesse instantanée***.

4.2. Vitesse instantanée

Soit un point M mobile par rapport au référentiel $\Re$ lié à l'observateur. Le vecteur position dans le repère cartésien $\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$ lié au référentiel $\Re$ est $\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{e_x} + y\cdot\vec{e_y} + z\cdot\vec{e_z}$. La vitesse instantanée de M par rapport à $\Re$ est le vecteur :

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R \tag{1.16}$$

Un point dont la vitesse est *toujours nulle* est appelé ***point fixe***.

Remarque : la dérivée du vecteur position se fait par rapport au référentiel $\Re$. On rappelle que ne pas mentionner le référentiel n'a aucun sens. $\Re$ signifie ici référentiel et repère cartésien.

4.3. Composantes cartésiennes du vecteur vitesse

L'observateur étant lié au référentiel, la base cartésienne B_{Ca} est fixe et les vecteurs unitaires $\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}$ sont indépendant du temps.

Comme $\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{e_x} + y\cdot\vec{e_y} + z\cdot\vec{e_z}$, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_R\cdot\vec{e_x} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{e_x}}{dt}\right)_R}_{0\ car\ base\ fixe}\cdot x + \left(\frac{dy}{dt}\right)_R\cdot\vec{e_y} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{e_y}}{dt}\right)_R}_{0\ car\ base\ fixe}\cdot y + \left(\frac{dz}{dt}\right)_R\cdot\vec{e_z} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{e_z}}{dt}\right)_R}_{0\ car\ base\ fixe}\cdot z \qquad (1.17)$$

ou plus simplement, en utilisant la notation « pointée » :

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \dot{x}\cdot\vec{e_x} + \dot{y}\cdot\vec{e_y} + \dot{z}\cdot\vec{e_z} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{u_{M/R}} =_{B_{Ca}} \begin{vmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{vmatrix} \qquad (1.18)$$

4.4. Composantes cylindriques du vecteur vitesse

Dans la base cylindrique mobile B_{Cyl}, le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = r\cdot\vec{e_r} + z\cdot\vec{e_z}$. En dérivant par rapport au temps :

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \left[\frac{d}{dt}\left(r\cdot\vec{e_r} + z\cdot\vec{e_z}\right)\right]_R = \dot{r}\cdot\vec{e_r} + r\cdot\left(\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right)_R + \dot{z}\cdot\vec{e_z} + \underbrace{z\cdot\left(\frac{d\vec{e_z}}{dt}\right)_R}_{0\ car\ e_z\ fixe} \qquad (1.19)$$

soit :

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \dot{r}\cdot\vec{e_r} + r\dot{j}\cdot\vec{e_j} + \dot{z}\cdot\vec{e_z} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{u_{M/R}} =_{B_{Cyl}} \begin{vmatrix}\dot{r}\\ r\dot{j}\\ \dot{z}\end{vmatrix} \qquad (1.20)$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \dot{r}\cdot\vec{e_r} + r\cdot\left(\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right)_R + \dot{z}\cdot\vec{e_z} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{u_{M/R}} = \dot{r}\cdot\vec{e_r} + r\cdot\left(\frac{d\vec{e_r}}{dj}\right)_R\cdot\left(\frac{dj}{dt}\right)_R + \dot{z}\cdot\vec{e_z} \qquad (1.21)$$

or le vecteur $\vec{e_r}$ est mobile dans R et son projeté dépend de la variable φ(t). Ce vecteur n'étant pas fixe dans R, sa dérivée par rapport au référentiel R n'est pas nulle. Nous avons démontré précédemment que $\left(\frac{d\vec{e_r}}{dj}\right)_R = \vec{e_j}$. Il en résulte que :

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \dot{r}\cdot\vec{e_r} + r\cdot\dot{j}\cdot\vec{e_j} + \dot{z}\cdot\vec{e_z} \qquad (1.22)$$

V - ACCELERATION D'UN POINT PAR RAPPORT A UN REFERENTIEL

5.1. Accélération moyenne

Habituellement, on parle d'accélération en termes de différence entre deux vecteurs vitesse à deux instants t_1 et t_2 :

$$\overrightarrow{a_{moy}} = \frac{\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_1}}{t_2 - t_1} \tag{1.23}$$

Cette définition ne permet pas de connaître l'accélération du point M à tout instant du parcours. On a alors recours à l'***accélération instantanée***.

5.2. Accélération instantanée

Soit un point M mobile par rapport au référentiel R lié à l'observateur. Le vecteur position dans le repère cartésien $\left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ lié au référentiel R est $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{e_x} + y \cdot \overrightarrow{e_y} + z \cdot \overrightarrow{e_z}$. L'accélération instantanée de M par rapport à R est définie par la dérivée vectorielle du vecteur vitesse, c'est-à-dire le vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{\upsilon_{M/R}}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R} \tag{1.24}$$

5.3. Composantes cartésiennes du vecteur accélération

L'observateur étant lié au référentiel R, la base cartésienne B_{Ca} est fixe et les vecteurs unitaires $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ sont indépendants du temps.

Comme $\overrightarrow{u_{M/R}} = \dot{x} \cdot \overrightarrow{e_x} + \dot{y} \cdot \overrightarrow{e_y} + \dot{z} \cdot \overrightarrow{e_z}$, le vecteur accélération s'écrit en dérivant par rapport au temps le vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_R \cdot \overrightarrow{e_x} + \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{e_x}}{dt^2}\right)_R}_{0 \ car \ base \ fixe} \cdot x + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_R \cdot \overrightarrow{e_y} + \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{e_y}}{dt^2}\right)_R}_{0 \ car \ base \ fixe} \cdot y + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_R \cdot \overrightarrow{e_z} + \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{e_z}}{dt^2}\right)_R}_{0 \ car \ base \ fixe} \cdot z \tag{1.25}$$

Soit

$$\boxed{\overrightarrow{a_{M/R}} = \ddot{x} \cdot \overrightarrow{e_x} + \ddot{y} \cdot \overrightarrow{e_y} + \ddot{z} \cdot \overrightarrow{e_z} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{a_{M/R}} = {}_{B_{Ca}}\begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}} \tag{1.26}$$

5.4. Composantes cylindriques du vecteur accélération

Dans la base cylindrique mobile B_{Cyl}, le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = r \cdot \overrightarrow{e_r} + z \cdot \overrightarrow{e_z}$ et le vecteur vitesse $\overrightarrow{u_{M/R}} = \dot{r} \cdot \overrightarrow{e_r} + r \cdot \dot{j} \cdot \overrightarrow{e_j} + \dot{z} \cdot \overrightarrow{e_z}$.

En dérivant par rapport au temps l'expression de la vitesse :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{r}\cdot\overrightarrow{e_r} + r\cdot\dot{j}\cdot\overrightarrow{e_j} + \dot{z}\cdot\overrightarrow{e_z}\right)\right]_R$$

$$= \ddot{r}\cdot\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\cdot\left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_R + \dot{r}\cdot\dot{j}\cdot\overrightarrow{e_j} + r\cdot\ddot{j}\cdot\overrightarrow{e_j} + r\cdot\dot{j}\cdot\left(\frac{d\overrightarrow{e_j}}{dt}\right)_R + \ddot{z}\cdot\overrightarrow{e_z} + \underbrace{\dot{z}\cdot\left(\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right)_R}_{0 \;\; car \;\; e_z \;\; fixe} \quad (1.27)$$

Soit :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\ddot{r} - r\cdot\dot{j}^2\right)\cdot\overrightarrow{e_r} + \left(r\cdot\ddot{j} + 2\dot{r}\cdot\dot{j}\right)\cdot\overrightarrow{e_j} + \ddot{z}\cdot\overrightarrow{e_z} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{a_{M/R}} =_{B_{Cyl}} \begin{vmatrix} \ddot{r} - r\cdot\dot{j}^2 \\ r\cdot\ddot{j} + 2\dot{r}\cdot\dot{j} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} \quad (1.28)$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \ddot{r}\cdot\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\cdot\left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_R + \dot{r}\cdot\dot{j}\cdot\overrightarrow{e_j} + r\cdot\ddot{j}\cdot\overrightarrow{e_j} + r\cdot\dot{j}\cdot\left(\frac{d\overrightarrow{e_j}}{dt}\right)_R + \ddot{z}\cdot\overrightarrow{e_z} \quad (1.29)$$

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \ddot{r}\cdot\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\cdot\left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dj}\right)_R\cdot\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_R + \dot{r}\cdot\dot{j}\cdot\overrightarrow{e_j} + r\cdot\ddot{j}\cdot\overrightarrow{e_j} + r\cdot\dot{j}\cdot\left(\frac{d\overrightarrow{e_j}}{dj}\right)_R\cdot\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_R + \ddot{z}\cdot\overrightarrow{e_z} \quad (1.30)$$

or les vecteurs $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_j}$ sont mobiles dans R et leurs projetés dépendent de la variable φ(t). Ces vecteurs n'étant pas fixes dans R, leurs dérivées par rapport au référentiel R ne sont pas nulles. Nous avons démontré précédemment que $\left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dj}\right)_R = \overrightarrow{e_j}$ et $\left(\frac{d\overrightarrow{e_j}}{dj}\right)_R = -\overrightarrow{e_r}$.

Il en résulte que :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \ddot{r}\cdot\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\cdot\dot{j}\cdot\overrightarrow{e_j} + \dot{r}\cdot\dot{j}\cdot\overrightarrow{e_j} + r\cdot\ddot{j}\cdot\overrightarrow{e_j} - r\cdot\dot{j}^2\cdot\overrightarrow{e_r} + \ddot{z}\cdot\overrightarrow{e_z} \quad (1.31)$$

VI – CAS PARTICULIER : LA BASE DE FRENET

6.1. Abscisse curviligne

Lorsque l'on connaît la trajectoire d'un point, il est pratique de le repérer sur cette trajectoire par son abscisse curviligne $s = \overline{OM}$ sur la trajectoire orientée. On associe alors au point M de la trajectoire un trièdre formé par les trois vecteurs unitaires :

- $\overrightarrow{e_T}$ appelé ***vecteur tangent*** car tangent au point M à la trajectoire ;
- $\overrightarrow{e_N}$ ***vecteur normal*** car normal à la trajectoire et orienté vers le centre du cercle de rayon R_C tangent à la trajectoire au point M (cercle osculateur) tel que $\left(\frac{d\overrightarrow{e_T}}{ds}\right) = \frac{\overrightarrow{e_N}}{R_C}$;
- $\overrightarrow{e_b}$ appelé ***vecteur binormal*** défini par $\overrightarrow{e_b} = \overrightarrow{e_T} \otimes \overrightarrow{e_N}$. Cette base est très utile lorsque l'on connaît la trajectoire. Le plan $\left(M, \overrightarrow{e_T}, \overrightarrow{e_N}\right)$ est appelé plan osculateur.

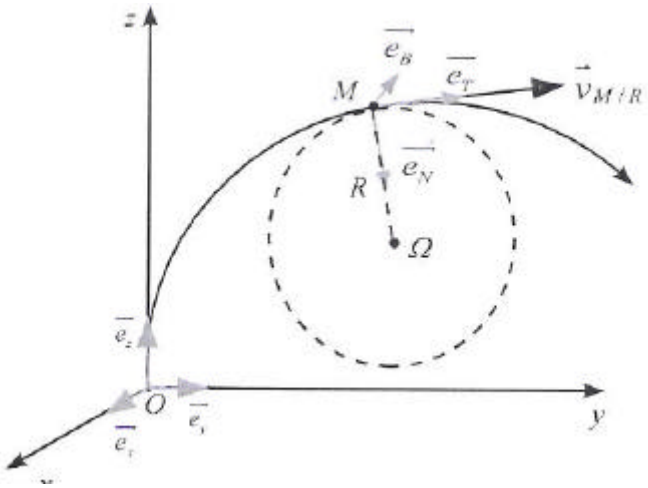


Fig.8 : Base de Frenet

La base de Frenet est mobile dans le référentiel R.

Lors du déplacement de M en M' sur cette courbe, le point parcourt, au court d'une durée infinitésimale dt, la distance infinitésimale $d\ell = \left\|d\vec{r}\right\| = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\|$ ou aussi $d\ell = \left\|\vec{u}_{M/R}\right\| \cdot \left|dt\right|$. Si cette distance est parcourue dans le sens conventionnel d'orientation de la courbe, on l'appelle abscisse curviligne $d\ell = ds$, sinon on pose $d\ell = -ds$. Ainsi, l'abscisse curviligne du point M relativement à l'origine O est :

$$\overrightarrow{OM} = s(M) = \int_O^M ds$$

On parle ici de coordonnées intrinsèques de M ; il s'agit simplement d'une mesure de la longueur de l'arc de courbure OM, associée à un signe désignant les positions respectives de O et M.

6.2. Composantes du vecteur vitesse

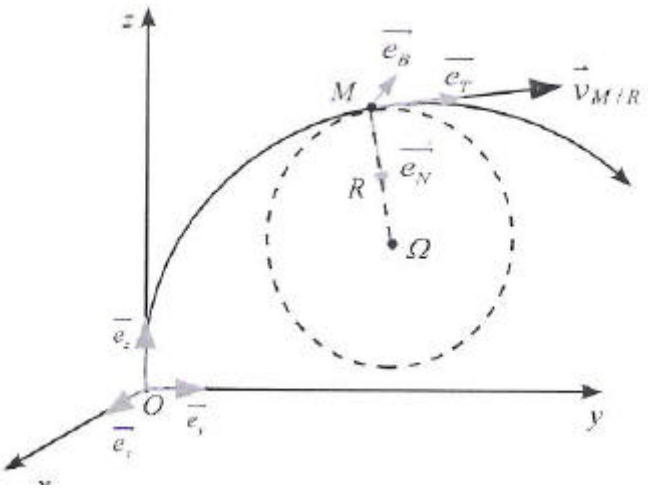


Fig.9 : Vitesse dans la base de Frenet

Le vecteur vitesse est par construction tangent à la trajectoire.

$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}\right)_R$ correspond à $\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\overrightarrow{OM}}\right)_R$ et s'identifie à $\vec{e}_T$ car sa norme tend vers l'unité et son support tend vers la tangente au point à la trajectoire.

$\frac{ds}{dt}$ est la vitesse scalaire dont le signe dépend du sens d'orientation de la trajectoire.

La vecteur vitesse s'écrit :

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}\right)_R}_{\vec{e}_T} \cdot \underbrace{\left(\frac{ds}{dt}\right)_R}_{u} \quad \text{soit} \quad \boxed{\overrightarrow{u_{M/R}} = u \cdot \overrightarrow{e_T}} \qquad (1.32)$$

La grandeur algébrique $u = ds/dt$ a donc un signe, qui dépend du sens effectif de parcours de M sur sa trajectoire (C), à l'instant considéré.

6.3. Composantes de Frenet du vecteur accélération

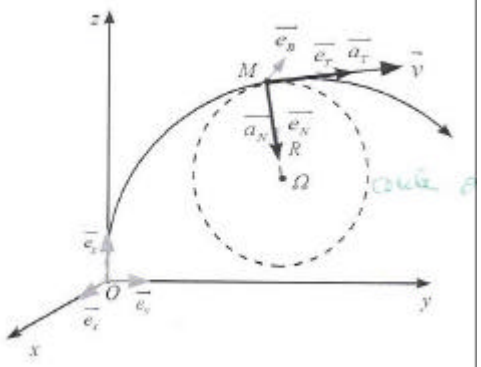


Fig.10 : Accélération dans la base de Frenet

La vitesse s'écrit dans la base de Frenet :

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = u \cdot \overrightarrow{e_T} \qquad (1.33)$$

En dérivant par rapport au temps cette expression, on obtient :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R = \left(\frac{d}{dt}u\overrightarrow{e_T}\right)_R = \left(\frac{du}{dt}\right)_R \cdot \overrightarrow{e_T} + u \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{e_T}}{dt}\right)_R$$

Comme :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{e_T}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{e_T}}{ds}\right)_R \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)_R = \frac{\overrightarrow{e_N}}{R_C} \cdot u \qquad (1.34)$$

On obtient donc :

$$\boxed{\overrightarrow{a_{M/R}} = \frac{du}{dt} \cdot \overrightarrow{e_T} + \frac{u^2}{R_C} \cdot \overrightarrow{e_N}} \qquad (1.35)$$

L'accélération se décompose en une accélération tangentielle à la trajectoire :

$$\overrightarrow{a_T} = \frac{du}{dt} \cdot \overrightarrow{e_T} \quad \text{qui a pour norme} \quad a_T = \frac{du}{dt} \qquad (1.36)$$

et une accélération normale à la trajectoire :

$$\overrightarrow{a_N} = \frac{u^2}{R} \cdot \overrightarrow{e_N} \quad \text{qui a pour norme} \quad a_N = \frac{u^2}{R_C} \qquad (1.37)$$

L'accélération tangentielle traduit les variations de ***la norme de la vitesse*** alors que l'accélération normale traduit l'incurvation de la trajectoire. On rappelle que la longueur R représente le rayon de courbure de la trajectoire, c'est-à-dire le rayon du cercle osculateur à cette trajectoire au point M.

Nature du mouvement	*Définition particulière*	*Accélération tangentielle*	*Accélération normale*	*Vecteur accélération*
quelconque		$\frac{du}{dt}\cdot\overrightarrow{e_T}$	$\frac{u^2}{R_C}\cdot\overrightarrow{e_N}$	$\overrightarrow{a_{M/R}}=\frac{du}{dt}\cdot\overrightarrow{e_T}+\frac{u^2}{R_C}\cdot\overrightarrow{e_N}$

Bilan :

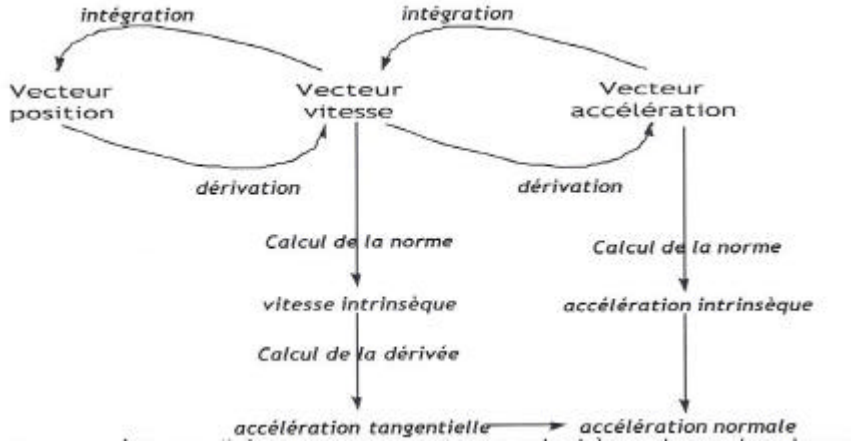


Fig.11 : Schéma de liaison

VII - EXEMPLES DE MOUVEMENTS ET DE TRAJECTOIRES

7.1. Type de trajectoires

Lorsque l'on étudie le mouvement d'un mobile M relativement au référentiel R, la suite des positions relatives de M dans R, c'est-à-dire la suite des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, définit une certaine courbe C appelée ***trajectoire de M dans R***. On peut définir plusieurs types de trajectoires mais les plus repandues sont les suivantes :

- ***Trajectoire rectiligne*** : la trajectoire est une droite, le rayon de courbure est infini et la composante normale de l'accélération est nulle.

- ***Trajectoire circulaire*** : la trajectoire est un cercle, la trajectoire est donc plane, le rayon de courbure est constant.

- ***Trajectoire curviligne*** : la trajectoire est une courbe.

- ***Trajectoire hélicoïdale*** : la trajectoire est une hélice.

7.2. Type de mouvements

On peut définir plusieurs types de mouvements mais les plus repandus sont les suivants :

• ***Mouvement uniforme*** : la valeur algébrique de la vitesse est constante, le vecteur vitesse n'est pas forcément constant, seule la composante tangentielle de l'accélération est nulle.

• ***Mouvement uniformément varié*** : la valeur algébrique de l'accélération tangentielle est constante.

• ***Mouvement accéléré*** : la valeur algébrique de la vitesse augmente, la composante tangentielle de l'accélération est dans le sens du mouvement.

• ***Mouvement ralenti/décéléré*** : la valeur algébrique de la vitesse diminue, la composante tangentielle de l'accélération est dans le sens contraire du mouvement.

• ***Mouvement sinusoïdal*** : une composante de position dépend sinusoïdalement du temps.

• ***Mouvement en translation*** : le vecteur vitesse est identique en tout point.

• ***Mouvement en rotation*** : la trajectoire du point est circulaire.

Fin Cours 4

7.3. Cas du mouvement uniforme

Un mouvement est uniforme quand la norme de la vitesse reste constante. Dans ce cas l'accélération tangentielle est nulle : $\overrightarrow{a_T} = \vec{0}$ ($\frac{du}{dt} = 0$). Si un mouvement est rectiligne et uniforme sont accélération est nulle $\overrightarrow{a_T} = \overrightarrow{a_N} = \vec{0}$.

Nature du mouvement	***Définition particulière***	***Accélération tangentielle***	***Accélération normale***	***Vecteur accélération***
uniforme	$u = c^{ste}$ (norme)	0	$\frac{u^2}{R_C} \cdot \overrightarrow{e_N}$	$\overrightarrow{a_{M/R}} = \frac{u^2}{R_C} \cdot \overrightarrow{e_N}$

7.4. Cas du mouvement rectiligne

Les mouvements rectilignes sont caractérisés par une trajectoire rectiligne et donc une accélération normale nulle $\overrightarrow{a_N} = \vec{0}$ (l'accélération est purement tangentielle $a_N = \frac{u^2}{R} = 0$ car le rayon de courbure est infini). Si $\vec{a}$ et $\vec{u}$ ont le même sens, le mouvement est accéléré, décéléré dans le cas où les deux vecteurs sont de sens contraire.

Nature du mouvement	***Définition particulière***	***Accélération tangentielle***	***Accélération normale***	***Vecteur accélération***
rectiligne	$R_C \to \infty$	$\frac{du}{dt} \cdot \overrightarrow{e_T}$	0	$\overrightarrow{a_{M/R}} = \frac{du}{dt} \cdot \overrightarrow{e_T}$
rectiligne et uniforme	$u = c^{ste}$ (norme) $R_C \to \infty$	0	0	$\overrightarrow{a_{M/R}} = \vec{0}$

7.5. Cas particulier du mouvement circulaire

Le point M décrit un cercle de rayon R et de centre O dans le plan Oxy. On choisira donc la base cylindrique pour exprimer le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = R \cdot \vec{e}_r$. On obtient donc les composantes de $\overrightarrow{u_{M/R}}$ et $\overrightarrow{a_{M/R}}$ dans cette même base sachant que $r = R = Cste \ (\dot{r} = 0)$:

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{j} \\ \dot{z} \end{vmatrix}_{B_{Cyl}} = \begin{vmatrix} 0 \\ R\dot{j} \\ 0 \end{vmatrix}_{B_{Cyl}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a_{M/R}} = \begin{vmatrix} \ddot{r} - r \cdot \dot{j}^2 \\ r \cdot \ddot{j} + 2\dot{r} \cdot \dot{j} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}_{B_{Cyl}} = \begin{vmatrix} -R \cdot \dot{j}^2 \\ R \cdot \ddot{j} \\ 0 \end{vmatrix}_{B_{Cyl}} \tag{1.38}$$

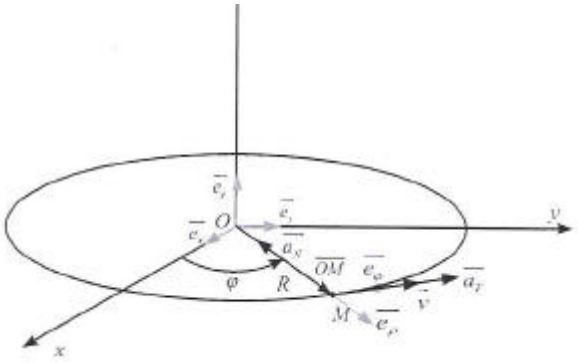


Fig.11 : Mouvement Circulaire

Introduction de la vitesse de rotation w pour un mouvement circulaire :

On appelle vitesse de rotation ω la dérivée par rapport au temps de la position angulaire :

$$w = \left(\frac{dj}{dt} \right)_R = \dot{j}$$

Le vecteur vitesse de rotation $\vec{w}$ est défini par :

$$\boxed{\vec{u} = \vec{w} \wedge \overrightarrow{OM}} \tag{1.39}$$

Le vecteur vitesse est donc perpendiculaire au vecteur $\vec{w}$ et au vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Si le mouvement circulaire est contenu dans le plan Oxy, le vecteur position est suivant l'axe Oz. Son sens est donné par la règle du tire bouchon :

$$\vec{w} = w \cdot \vec{e}_z \tag{1.40}$$

Ecriture de la vitesse en fonction du vecteur rotation w :

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{vmatrix}_{B_{Cyl}} \wedge \begin{vmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{B_{Cyl}} = \begin{vmatrix} 0 \\ Rw \\ 0 \end{vmatrix}_{B_{Cyl}} = R\dot{j} \cdot \vec{e}_j \tag{1.41}$$

La norme de la vitesse s'écrit alors : $\boxed{u = R\dot{j} = Rw}$ (1.42)

Ecriture de l'accélération en fonction du vecteur rotation w :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{w} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right]_R = \left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{w} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R \quad (1.43)$$

Sachant que $\overrightarrow{OM} = R \cdot \vec{e_r}$, $\vec{w} = w \cdot \vec{e_z}$, $\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = Rw \cdot \vec{e_j} = R\dot{j} \cdot \vec{e_j}$ et en appliquant les règles de dérivation des vecteurs :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = R \cdot \left[\frac{dw}{dt} \cdot \left(\vec{e_z} \wedge \vec{e_r}\right)\right]_R + Rw^2\left(\vec{e_z} \wedge \vec{e_j}\right) = R \cdot \left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_R \vec{e_j} - Rw^2\vec{e_r} \quad (1.44)$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire et uniforme $\left(\frac{dw}{dt}\right)_R = 0$ (vitesse = constante = Rω), l'accélération est donc centripète :

$$\boxed{\overrightarrow{a_{M/R}} = -Rw^2\vec{e_r} = -R\dot{j}^2\vec{e_r} = -\frac{u^2}{R}\vec{e_r}} \quad (1.45)$$

On obtient alors les équations paramétriques du mouvement :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} r = R \\ j = wt + j_0 \\ z = 0 \end{vmatrix}_{B_{Cyl}} = \begin{vmatrix} x = R \cdot \cos(wt + j_0) \\ y = R \cdot \sin(wt + j_0) \\ z = 0 \end{vmatrix}_{B_{Ca}} \quad (1.46)$$

VIII - COMPOSITION DES MOUVEMENTS

8.1. Changement de référentiels

Il est parfois indispensable de décrire le mouvement d'un objet par rapport à différents référentiels. Le problème est alors de déterminer les relations entre les vitesses et les accélérations dans deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre. Dans la suite on considère un référentiel et son repère associé $\left(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$ fixe et le référentiel R' et son repère associé $\left(O', \vec{e_{x'}}, \vec{e_{y'}}, \vec{e_{z'}}\right)$ mobile.

Le mouvement du second référentiel peut être décomposé en deux mouvements : un mouvement de translation de R' par rapport à R et un mouvement de rotation de R' par rapport à R.

8.2 Référentiels en translation

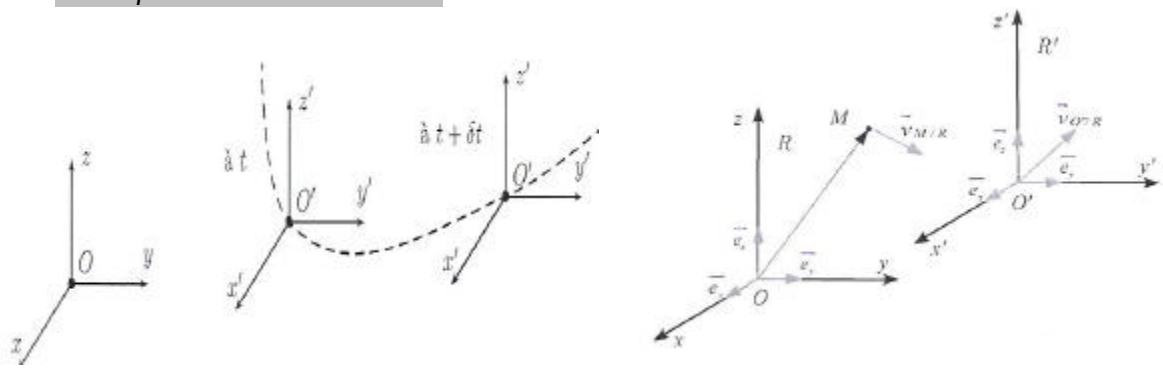


Fig.12 : Référentiels en translation

Le référentiel R' est en translation par rapport au référentiel R si tous les points de R' ont la même vitesse et donc la même accélération.

La vitesse de R' est donc celle de l'origine du repère : $\overrightarrow{u_{O'/R}}$

8.2.1. Composition des vitesses dans un référentiel en translation

Connaissant la vitesse d'un point M dans le référentiel mobile R', c'est-à-dire $\overrightarrow{u_{M/R'}}$, on souhaite déterminer cette vitesse dans le référentiel fixe .

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{u_{O'/R}} + \left[\frac{d}{dt}\left(x'\cdot\overrightarrow{e_{x'}} + y'\cdot\overrightarrow{e_{y'}} + z'\cdot\overrightarrow{e_{z'}}\right)\right]_R \qquad (1.47)$$

D'où :

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \overrightarrow{u_{O'/R}} + \left(\dot{x}'\cdot\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'\cdot\overrightarrow{e_{y'}} + \dot{z}'\cdot\overrightarrow{e_{z'}}\right) + \underbrace{\left(x'\cdot\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt} + y'\cdot\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt} + z'\cdot\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}\right)_R}_{0 \;\; car \;\; base \;\; fixe} \qquad (1.48)$$

Le référentiel R' étant en translation par rapport au référentiel R, les vecteurs $\overrightarrow{e_{x'}}, \overrightarrow{e_{y'}}, \overrightarrow{e_{z'}}$ sont fixes dans le référentiel R. Il vient donc :

$$\boxed{\overrightarrow{\upsilon_{M/R}} = \overrightarrow{\upsilon_{O'/R}} + \overrightarrow{\upsilon_{M/R'}}} \qquad (1.49)$$

Exemple : Le marcheur lié au référentiel R' est en translation par rapport au référentiel R. La pluie tombe verticalement par rapport à R mais tombe inclinée par rapport au marcheur qui doit donc incliner son parapluie.

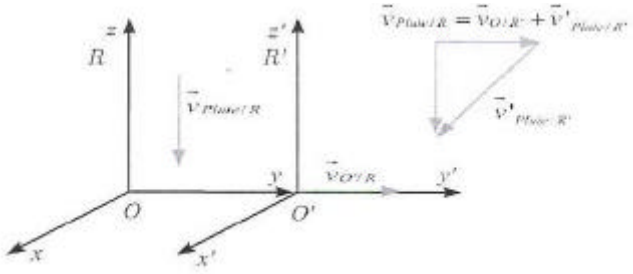


Fig.13 : Référentiels en translation

8.2.2. Composition des accélérations dans un référentiel en translation

La démarche est similaire :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R + \left(\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right)_R = \overrightarrow{a_{O'/R}} + \left[\frac{d^2}{dt^2}\left(x'\cdot\overrightarrow{e_{x'}} + y'\cdot\overrightarrow{e_{y'}} + z'\cdot\overrightarrow{e_{z'}}\right)\right]_R \quad (1.50)$$

D'où :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \overrightarrow{a_{O'/R}} + \left(\ddot{x}'\cdot\overrightarrow{e_{x'}} + \ddot{y}'\cdot\overrightarrow{e_{y'}} + \ddot{z}'\cdot\overrightarrow{e_{z'}}\right) + \underbrace{\left(x'\cdot\frac{d^2\overrightarrow{e_{x'}}}{dt^2} + y'\cdot\frac{d^2\overrightarrow{e_{y'}}}{dt^2} + z'\cdot\frac{d^2\overrightarrow{e_{z'}}}{dt^2}\right)_R}_{0 \quad car \quad base \quad fixe} \quad (1.51)$$

Le référentiel R' étant en translation par rapport au référentiel R, les vecteurs $\overrightarrow{e_{x'}}, \overrightarrow{e_{y'}}, \overrightarrow{e_{z'}}$ sont fixes dans le référentiel R. Il vient donc :

$$\boxed{\overrightarrow{a_{M/R}} = \overrightarrow{a_{O'/R}} + \overrightarrow{a_{M/R'}}} \quad (1.52)$$

8.3. Référentiels en rotation

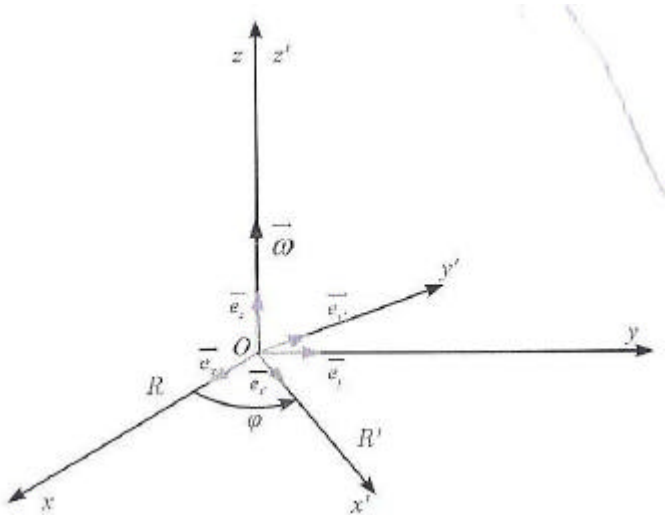


Fig.14 : Référentiels en rotation

Le référentiel R' est en rotation par rapport à un axe lié au référentiel R (ici l'axe Oz). Tous les points de cet axe ont donc une vitesse nulle. Le vecteur vitesse de rotation $\vec{w}_{R'/R}$ est dirigé selon l'axe de rotation et son sens est donné par la règle du tire-bouchon.

Considérons un vecteur arbitraire, éventuellement variable, défini par ses projections sur la base de R' : $\vec{U} = U_x'\vec{e}_x' + U_y'\vec{e}_y' + U_z'\vec{e}_z'$. Lors de l'étude des variations de ce vecteur au cours du temps, on peut adopter deux points de vue selon que l'observateur est fixe dans R ou fixe dans R'. Nous prendrons ici le cas ou l'observateur est fixe de R. Par conséquent, les vecteurs $\left(\vec{e}_x', \vec{e}_y', \vec{e}_z'\right)$ ne sont pas fixes pour cet observateur. ***La formule de Bour*** nous donne alors :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{R'} + \Omega_{R'/R} \wedge \vec{U}}$$

8.3.1. Composition des vitesses dans un référentiel en rotation

Connaissant la vitesse d'un point dans le référentiel en rotation R', c'est-à-dire $\overrightarrow{u_{M/R'}}$, on souhaite déterminer cette vitesse dans le référentiel fixe R. Les origines des deux repères O et O' restent confondues.

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R}_{0 \text{ car confondus}} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R = \left[\frac{d}{dt}\left(x'\cdot\overrightarrow{e_{x'}} + y'\cdot\overrightarrow{e_{y'}} + z'\cdot\overrightarrow{e_{z'}}\right)\right]_R \qquad (1.53)$$

D'où

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \underbrace{\dot{x}'\cdot\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'\cdot\overrightarrow{e_{y'}} + \dot{z}'\cdot\overrightarrow{e_{z'}}}_{\overrightarrow{u_{M/R'}}} + \left(x'\cdot\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt} + y'\cdot\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt} + z'\cdot\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}\right)_R \qquad (1.54)$$

Le référentiel R' étant en rotation par rapport au référentiel R, les dérivées des vecteurs $\overrightarrow{e_{x'}}, \overrightarrow{e_{y'}}, \overrightarrow{e_{z'}}$ s'expriment en fonction de $\vec{w}_{R'/R}$. Les vecteur unitaires $\overrightarrow{e_{x'}}, \overrightarrow{e_{y'}}, \overrightarrow{e_{z'}}$ ne sont plus fixes dans le référentiel R. En considérant que $\overrightarrow{u_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \vec{w} \wedge \overrightarrow{OM}$ et en supposant le cas où $\vec{w}_{R'/R} = w \cdot \overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_{z'}}$, on obtient :

$$\begin{cases} \left(\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt}\right)_R = \vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{e_{x'}} \\ \left(\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt}\right)_R = \vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{e_{y'}} \\ \left(\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}\right)_R = \vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{e_{z'}} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \left(\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt}\right)_R = w\overrightarrow{e_{z'}} \wedge \overrightarrow{e_{x'}} = w\overrightarrow{e_y} \\ \left(\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt}\right)_R = w\overrightarrow{e_{z'}} \wedge \overrightarrow{e_{y'}} = -w\overrightarrow{e_{x'}} \\ \left(\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}\right)_R = w\overrightarrow{e_{z'}} \wedge \overrightarrow{e_{z'}} = 0 \end{cases} \qquad (1.55)$$

Ce qui permet d'écrire pour la vitesse :

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \overrightarrow{u_{M'/R}} + \left[x'\cdot\left(\vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{e_{x'}}\right) + y'\cdot\left(\vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{e_{y'}}\right) + z'\cdot\left(\vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{e_{z'}}\right)\right]_R \qquad (1.56)$$

Soit :

$$\boxed{\overrightarrow{u_{M/R}} = \overrightarrow{u_{M/R'}} + \vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}} \qquad (1.57)$$

8.3.2. Composition des accélérations dans un référentiel en rotation

La démarche est similaire :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R = \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R}_{0 \text{ car confondus}} + \left(\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right)_R = \left[\frac{d^2}{dt^2}\left(x'\cdot\overrightarrow{e_{x'}} + y'\cdot\overrightarrow{e_{y'}} + z'\cdot\overrightarrow{e_{z'}}\right)\right]_R \quad (1.58)$$

On obtient finalement

$$\boxed{\overrightarrow{a_{M/R}} = \overrightarrow{a_{M/R'}} + \left(\frac{d\vec{w}_{R'/R}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{w}_{R'/R} \wedge \left(\vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2\cdot\vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{u_{M/R'}}} \quad (1.59)$$

Démonstration :

Le référentiel R' étant en rotation par rapport au référentiel R, il vient donc :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left[\frac{d^2}{dt^2}\left(x'\cdot\overrightarrow{e_{x'}} + y'\cdot\overrightarrow{e_{y'}} + z'\cdot\overrightarrow{e_{z'}}\right)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{u_{M/R'}} + \vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right]_R \quad (1.60)$$

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{u_{M/R'}}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\vec{w}_{R'/R}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R \wedge \vec{w}_{R'/R} \quad (1.61)$$

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{x}'\cdot\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'\cdot\overrightarrow{e_{y'}} + \dot{z}'\cdot\overrightarrow{e_{z'}}\right)\right]_R + \left(\frac{d\vec{w}_{R'/R}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R \wedge \vec{w}_{R'/R} \quad (1.62)$$

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \underbrace{\frac{d\dot{x}'}{dt}\cdot\overrightarrow{e_{x'}} + \frac{d\dot{y}'}{dt}\cdot\overrightarrow{e_{y'}} + \frac{d\dot{z}'}{dt}\cdot\overrightarrow{e_{z'}}}_{\overrightarrow{a_{M/R'}}} + \underbrace{\dot{x}'\cdot\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt} + \dot{y}'\cdot\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt} + \dot{z}'\cdot\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}}_{\dot{x}'\cdot\left(\vec{w}_{R'/R}\times\overrightarrow{e_{x'}}\right)+\dot{y}'\cdot\left(\vec{w}_{R'/R}\times\overrightarrow{e_{y'}}\right)+\dot{z}'\cdot\left(\vec{w}_{R'/R}\times\overrightarrow{e_{z'}}\right)} + \left(\frac{d\vec{w}_{R'/R}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R \wedge \vec{w}_{R'/R}$$

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \overrightarrow{a_{M/R'}} + \vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{u_{M/R'}} + \left(\frac{d\vec{w}_{R'/R}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{w}_{R'/R} \wedge \left(\overrightarrow{u_{M/R'}} + \vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) \quad (1.63)$$

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \overrightarrow{a_{M/R'}} + \left(\frac{d\vec{w}_{R'/R}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{w}_{R'/R} \wedge \left(\vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2\cdot\vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{u_{M/R'}} \quad (1.64)$$

8.4. Loi de composition des mouvements

La loi de composition des mouvements permet déterminer la vitesse ou l'accélération d'un point M dans un référentiel R connaissant celle-ci dans un référentiel R' à la fois en translation et en rotation. En effet, quand le référentiel R' est en mouvement

quelconque par rapport au référentiel R, ce mouvement peut être décomposé en une addition d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation.

8.4.1. Composition des vitesses

En combinant les relations précédentes on obtient pour la vitesse :

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \overrightarrow{u_{O'/R}} + \overrightarrow{u_{M/R'}} + \vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} \tag{1.65}$$

que l'on met sous la forme :

$$\overrightarrow{u_{M/R}} = \overrightarrow{u_{M/R'}} + \underbrace{\overrightarrow{u_{O'/R}} + \vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\vec{u_e}(M,R/R')} \tag{1.66}$$

$\overrightarrow{\upsilon_{M/R}}$ est appelée vitesse absolue de M, $\overrightarrow{\upsilon_{M/R'}}$ est appelée vitesse relative de M et $\vec{\upsilon_e}(M,R'/R)$ est appelée la ***vitesse d'entraînement au point M*** du mouvement relatif de R' par rapport à R tel que $\vec{u_e}(M,R'/R) = \overrightarrow{u_{O'/R}} + \vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$.

Cette vitesse d'entraînement dépend de la position du point M mais pas de son mouvement. Par conséquent, deux points M et M' ayant, à un instant donné, des vitesses (absolue ou relative) différentes mais passant au même point O'M=O'M' de l'espace auront même vitesse d'entraînement. Dans le cas d'un mouvement de translation uniquement, la vitesse d'entraînement vérifie $\vec{\upsilon_e}(M,R'/R) = \overrightarrow{\upsilon_{O'/R}}$ pour tout point O' fixe de R'. On dit alors que le champ des vitesses d'entraînement est ***uniforme***.

8.4.2. Composition des accélérations

Quand le référentiel R' est en mouvement quelconque par rapport au référentiel R, en combinant les relations précédentes obtenues dans le cas du mouvement de translation et de rotation, on a :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \overrightarrow{a_{O'/R}} + \overrightarrow{a_{M/R'}} + \left(\frac{d\vec{w}_{R'/R}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{w}_{R'/R} \wedge \left(\vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2 \cdot \vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{u_{M/R'}} \tag{1.67}$$

que l'on met sous la forme :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \overrightarrow{a_{M/R'}} + \underbrace{\overrightarrow{a_{O'/R}} + \left(\frac{d\vec{w}_{R'/R}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{w}_{R'/R} \wedge \left(\vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}_{\vec{a_e}(M,R/R')} + \underbrace{2 \cdot \vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{u_{M/R'}}}_{\vec{a_c}(M,R/R')} \tag{1.68}$$

$\overrightarrow{a_{O'/R}} + \left(\frac{d\vec{w}_{R'/R}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{w}_{R'/R} \wedge \left(\vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$ est l'***accélération d'entraînement*** notée $\overrightarrow{a_c}(M, R/R')$ et $2 \cdot \vec{w}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{u_{M/R'}}$ est l'***accélération de Coriolis*** $\overrightarrow{a_c}(M, R/R')$.

Dans le cas d'un mouvement de translation, $\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{0}$ donc l'accélération de Coriolis est nulle et l'accélération d'entraînement vérifie $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_{O'/R}}$ (accélération relative) pour tout point O' fixe de R'. On dit alors que le champ des accélérations d'entraînement est ***uniforme***.

Remarque très importante :

$\overrightarrow{a_e}(M, R/R') \neq \frac{d\overrightarrow{u_e}}{dt}$

$a \wedge (b \wedge c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$

CHAPITRE 3 :

LA

DYNAMIQUE

- ***BUT DU CHAPITRE***
- ***SOMMAIRE DE CE CHAPITRE***

La dynamique a été crée par Isaac Newton, physicien mathématicien à l'Université de Cambridge (25 décembre 1642 à Woolsthorpe en Angleterre – 20 mars 1727 à Londres), en énonçant les trois lois fondamentales du mouvement. Il les a appliquées aux lois de Johannes Kepler (1571-1630) sur le mouvement orbital, et a ainsi obtenu la loi de la gravitation universelle, qui permet d'expliquer que tout corps (dans l'espace et sur la Terre) est soumis à une force appelée « gravité ». Il publia cette théorie dans son ouvrage intitulé *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, paru en 1687. Ce livre connu généralement sous le titre de *Principia* marqua un tournant dans l'histoire de la science.

La dynamique permet d'expliquer pourquoi la vitesse d'un objet se modifie en module ou en direction.

La cause : la présence de force(s) agissant sur la matière
La description de l'influence des forces : les 3 lois de la dynamique
Le personnage clé : Newton

I – NOTION DE « POINT MATERIEL »

Un point matériel M représente un système (un ou plusieurs objets physiques) dont la position peut être décrite à l'aide de trois composantes seulement (celle du point) et caractérisé par sa masse m : on le notera M(m) ou M par abus de langage.

On notera que le point matériel associe un point géométrique M, caractérisé par sa position à un instant donné (3 coordonnées dans l'espace) et un scalaire (sa masse m). La masse inerte intervient dans toutes les grandeurs cinétiques.

II – NOTION DE FORCES.

Toute action mécanique s'exerçant sur un objet a pour effet soit de modifier son mouvement ou de le mettre en mouvement, soit de le maintenir en équilibre, soit de le déformer. Cette action mécanique peut être décrite par une somme d'actions élémentaires. Chaque action mécanique élémentaire s'exerçant sur un corps peut être décrite par la connaissance des quatre caractéristiques suivante :

- le point d'application
- la droite d'action
- le sens
- la valeur c'est-à-dire son intensité

Ces quatre caractéristiques sont celles d'un vecteur et permet de construire une grandeur vectorielle nommée **force**. Une action sur un objet le mettant ou modifiant son mouvement peut être décrite par un ensemble de forces mais une simple connaissance de la somme de ces forces (somme vectorielle) n'est pas suffisante pour en décrire le mouvement. Il faut alors connaître une autre grandeur que l'on appelle **le moment total des forces** (somme vectorielle des moments des forces).

Pour être complet dans le connaissance d'une action sur un objet, il est donc indispensable de connaître deux grandeurs : ***la somme vectorielle des forces et la somme vectorielle des moments des forces*** s'exerçant sur l'objet.

2.1. Définition

Dans les parties précédentes de la dynamique, nous avons vu qu'un objet soumis à aucune force est au repos ou se déplace rectilignement à vitesse uniforme. Notons que « aucune force » signifie ici « pas de force » ou que les « forces s'annulent, se compensent ».

La dynamique relie le mouvement à ses causes. Ces dernières admettent une représentation vectorielle sous le nom de « forces ». Il est très difficile de définir la notion de force. Citons R. Feynman, Prix Nobel Physique 1963 : « si vous insistez pour avoir une définition précise de la force, vous ne l'aurez jamais ».

On définit alors la force par ses effets : « une force est ce qui modifie le mouvement ».

2.2. Les forces fondamentales

On distingue 4 forces fondamentales dans l'Univers, liées aux 4 interactions fondamentales :

La force gravitationnelle : elle est liée à l'interaction gravitationnelle que subit une masse m dans un champ de gravitation G. Tout point matériel A de masse m_A exerce sur un point matériel B de masse m_B une force attractive, appelée force gravitationnelle ou de gravitation :

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{AB^2} \cdot \frac{\vec{AB}}{AB}$$

avec G = 6,673.10^{-11} $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ la constante de gravitation (ou constante de Cavendish). Ainsi pour considérer qu'un point matériel ne subit aucune force, il faut qu'il soit infiniment éloigné de tout autre objet matériel. Il est donc clair qu'il ne peut exister de situations dans lesquelles un objet ne subit pas de forces. Ces forces sont toujours attractives, proportionnelles à la constante de gravitation universelle.

La force électromagnétique : elle est liée à l'interaction électromagnétique qui s'exerce sur une charge q en mouvement à la vitesse $\vec{u}_{M/R}$ dans le référentiel R. On l'appelle aussi force de Lorentz :

$$\vec{F} = q.\left(\vec{E}_M + \vec{u}_{M/R} \wedge \vec{B}_M\right)$$

Cette force est la contribution de deux effets : un champ électrique E et un champ magnétique B au point M où se trouve la particule. Son intensité est beaucoup plus grande que la force gravitationnelle. La différence entre ces deux forces est qu'une masse positive induit des forces gravitationnelles qui s'ajoutent (à longue distance, même faible, elle explique pourquoi la Terre reste sur son orbite comme le soleil dans notre galaxie). Par contre, pour les forces électromagnétiques, cela dépend de la charge q. Les forces peuvent donc soit s'ajouter, soit se neutraliser suivant le signe de la charge.

Rq : Jusqu'au 19ème Siècle, on pensait que ces deux effets n'avaient aucun lien. En 1820, le Danois H. C. Oersted provoqua une véritable électrochoc en démontrant expérimentalement qu'un fil conducteur parcouru par un courant électrique faisait dévier une aiguille aimantée. Le courant électrique créait donc un champ magnétique. En 1831, Faraday montra qu'un champ magnétique transitoire créait un courant. C'est le phénomène d'*induction* (le champ magnétique peut *induire* un courant). On peut alors produire de l'électricité !

La force nucléaire forte : cette force assure la cohésion du noyau atomique (force entre nucléons, c'est-à-dire entre protons, neutrons et entre quarks). Elle maintient les protons ensembles malgré la répulsion électromagnétique. C'est une force à courte portée car elle n'agit pas hors du noyau. Elle lie les quarks pour former les neutrons et les protons et lie les protons entre eux. De simples considérations d'ordres de grandeur imposent de toujours négliger les forces de gravitation et de pesanteur dans le cas des particules élémentaires.

La force nucléaire faible : cette force est 10^6 (un million) fois plus faible que la force nucléaire forte. Sa portée est la plus courte puisqu'elle agit à 10^{-17} mètres, c'est-à-dire pratiquement au contact de deux particules. Elle est à l'origine des réactions thermonucléaires (dans le soleil et dans les étoiles), puisqu'elle participe aussi à l'origine de la radioactivité. Elle participe à la transformation de l'hydrogène en hélium par un processus de transformation neutrons->protons. Sans elle, pas de chaleur et donc pas de vie.

	Intensité	Portée
Interaction forte (nucléaire)	10^4	~ 10^{-14}
Interaction électromagnétique	10^2	illimitée
Interaction faible (nucléaire)	10^{-2}	~ 10^{-17}
Interaction gravitationnelle	10^{-34}	Illimitée

(Intensité entre 2 protons séparés par une distance égale à leur diamètre, 2 femtomètres).

Exemple :
Considérons des forces attractives entre deux particules élémentaires, par exemple deux protons de masse m=1,67.10^{-27}kg et de charge q=1,6.10^{-19}C. Le rapport des forces de gravitation aux forces électrostatiques, indépendant de la distance, vaut environ 10^{-36}. Les forces de gravitation sont donc négligeables devant les forces électrostatiques.

Considérons maintenant le cas de champs extérieurs exercés sur les mêmes particules : un champ électrique de l'ordre de E=100V.m^{-1} (valeur faible) et un champ de pesanteur terrestre. Le rapport de ces deux forces est environ de 10^{-9}. Là encore, les forces de gravitation sont négligeables.

Considérons enfin un électron de masse m=9,1.10^{-31}kg, de charge q=-1,6.10^{-19}C et de vitesse v=3.10^8ms^{-1}. Cet électron est soumis aux champs habituels G=9,81N.kg^{-1}, E=10^3V.m^{-1} et B=10^{-5} T. La force de Lorentz (F_L=10^{-16}N) est alors dix mille milliards de fois plus intense que la force gravitationnelle (F_G=10^{-29}N). On négligera donc la force gravitationnelle devant la force de Lorentz.

Fin cours 6

2.3. Les autres forces

Toute autre force (force de rappel d'un ressort, force de réaction…) est bien réelle mais elle trouve son origine à l'échelle microscopique dans ces 4 forces fondamentales et tout

particulièrement dans la force électromagnétique. Si par exemple nous ne nous enfonçons pas dans le seul, c'est que les charges électriques de nos semelles sont repoussées par celles du sol ; si le ressort s'allonge ou au contraire se contracte, c'est que les charges rapprochées ou éloignées veulent se repousser ou au contraire s'attirer, etc…A ces échelles là, l'influence de la gravitation est négligeable et les interactions dans le noyau ne jouent aucun rôle.

- *La force de pesanteur (le poids) :*

La résultante des forces de gravitation exercées par un astre comme la Terre sur un point matériel de masse m s'écrit $\vec{F} = m\vec{G}$ où $\vec{G}$ est le champ de gravitation. La somme des forces de gravitation et des forces d'inerties d'entraînement dues à la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles porte le nom de ***force de pesanteur ou poids***.

« Le poids » s'identifie à la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre. Soit A(m_A) et M(m), on dit que toute masse m est soumise au champ gravitationnel crée par A en M et définit par $\vec{g}_A = -G \cdot \frac{m_A}{AM^2} \cdot \frac{\vec{AM}}{AM} = -G \cdot \frac{m_A}{AM^2} \cdot \vec{e}_{AM}$. Tout point matériel M de masse m subit de la part de m_A en A une force gravitationnelle $\vec{F}_{A\to M} = \vec{F}_A(M) = m \cdot \vec{g}_A(M)$. Le vecteur $\vec{g}_A = -g \cdot \vec{e}_z$ est dirigé selson la verticale locale (Oz). A la latitude de l'ordre de 45°, on a g ~ 9.81 $m.s^{-2}$.

Conclusion : Soit un point M de masse m, se trouvant à proximité du sol terrestre et soumis à son poids $\vec{P}$, force verticale et dirigée vers le bas, alors :

$$\boxed{\vec{P} = m \cdot \vec{g}}$$

- *La force électrostatique :*

Les forces électrostatiques, données par $\vec{F}_{M_1\to M_2} = -\vec{F}_{M_2\to M_1} = \frac{1}{4pe_o} \cdot \frac{q_1 q_2}{d^2}\vec{u}$, avec les mêmes notations. Elles sont répulsives pour des charges de même signe, liées à la permittivité du vide $e_o = 8.85\times10^{-12}\, F.m^{-1}$ et aux charges des objets en interaction.

- *Tension d'un fil :*

Soit un point matériel M de masse m accroché à l'extrémité d'un fil souple de masse négligeable et de longueur ℓ (fil inextensible). Le fil exerce une tension $\vec{T}$ sur le point matériel M, force dirigée selon le fil, de norme dépendante des autres forces appliquées au point M.

- *Force élastique (rappel d'un ressort) :*

Soit un ressort horizontal d'axe Ox, de masse négligeable, de longueur à vide ℓ_o et de raideur k (N.m-1). Si le ressort est étiré (sa nouvelle longueur est ℓ), il exerce une force de

rappel ayant tendance à le ramener à sa longueur au repos (l_o), proportionnelle à son allongement $(\ell - \ell_o)$ et à k :

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_o)\cdot \vec{e}_x$$

Cette relation définit la loi de Hooke selon laquelle la force $\vec{F}$ est, en norme, proportionnelle à ***l'allongement*** du ressort $\Delta\ell = (\ell - \ell_o)$. L'inverse de la raideur k, $s = 1/k$ est appelé ***souplesse du ressort***.

- *Force de frottement solide : réaction du support :*

Lors d'un contact entre deux solides, donc lors d'un contact entre un point matériel M(m) et un solide S (support par exemple), ce dernier exerce sur le point M une force $\vec{R}$ appelée **réaction**, composée d'une réaction normale (à la surface de contact, traduit seulement le caractère impénétrable du support) $\overrightarrow{R_N}$, et d'une réaction tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ (dite force de frottement, s'opposant au mouvement) vérifiant les lois de Coulomb :

- s'il y a glissement de M sur S : $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f \cdot \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ où f est coefficient de frottement. $\vec{T}$ est opposée à la vitesse $\vec{u}$ du point M par rapport à S (c'est-à-dire par rapport à un référentiel lié au solide S).

- s'il n'y a pas de glissement de M sur S ($\vec{u} = 0$) : $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < f \cdot \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$

- *Force de frottement fluide*

- Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide (gaz ou liquide), donc lorsqu'un point matériel se déplace dans un fluide, il est soumis à une force de frottement fluide $\vec{F}$, s'opposant au mouvement :

$$\vec{F} = -a\vec{u} \quad \text{si } \vec{u} \text{ est faible}$$
$$\vec{F} = -K \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \quad \text{si } \vec{u} \text{ est plus élevée}$$

Pour les déplacements de tous les jours (vélo, voiture….), les forces qui interviennent sont celles proportionnelles au carré de la vitesse mais la résolution mathématique est alors délicate ; on considère donc souvent que les forces sont proportionnelles à la vitesse.

2.4. Les unités

Une force est une grandeur vectorielle. Elle est donc caractérisée par une intensité, par une direction et par un sens, et par son unité. On peut donc être amené à la projeter sur un repère et donc à lui associer trois scalaires ! Dans le système international (SI) et en hommage à Newton, **l'unité est le Newton (N).** 1 Newton est la force nécessaire pour augmenter la vitesse de 1m.s^{-1} d'un objet de 1kg en 1s. **[N] = [kg.m.s^{-2}]**

III - PREMIERE LOI DE NEWTON OU « *PRINCIPE DE L'INERTIE* ».

3.1. Enoncé :

« Tout corps reste immobile ou conserve un mouvement rectiligne et uniforme aussi longtemps qu'aucune force extérieure ne vient modifier son état. »

$$\vec{u}(M/R) = C^{ste} \quad si \quad \sum \vec{F} = \vec{0}$$

On dit que le corps est « isolé ». Le mot « inertie » désigne la résistance aux changements dans le mouvement, la résistance à la mise en mouvement ou la résistance à la mise à l'arrêt. Cette première loi de Newton s'applique pour un point matériel placé dans un référentiel, appelé référentiel Galiléen, du nom de Galileo Galilée (1564-1642).

Pourtant cette loi est loin d'être évidente et intuitive quand nous savons qu'ils existent des forces de frottement, forces de gravitation et autres. Sur une bicyclette roulant en ligne droite sur une route plate et à vitesse constante, il faut pédaler en permanence pour garder cette vitesse constante et lutter contre les forces. Il ne peut donc y avoir de mouvement durable que si des forces motrices agissent en permanence (Aristote 384-322 av JC). Ce n'est que lorsque que Galilée découvre l'existence de forces de frottement que l'on peut raisonner selon le premier principe. Galilée avait étudié le mouvement d'une bille sur différents plans inclinés. Il en conclut que si jamais il existait un plan horizontal sur lequel la bille pouvait rouler sans frottement, alors le mouvement serait uniforme et perpétuel (même si la Terre est une sphère….)! Il faut donc annuler les forces en présence.

Newton attribue justement cette loi à Galilée qui avait écrit en 1632 qu' « ***un corps non soumis à des perturbations extérieures, une fois qu'il est en mouvement, reste à jamais en mouvement rectiligne et uniforme*** ». Cette loi est valable quelque soit le référentiel.

3.2. Référentiels Galiléens.

3.2.1. Définition

Un référentiel est dit Galiléen quand le principe de l'inertie (première loi de Newton) erst vérifiée dans ce référentiel.

Soit un référentiel R_o, qui n'est pas en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel Galiléen R_g. Dans ce cas :

$$\vec{a}(O \in R/R_g) \neq 0 \quad et/ou \quad \vec{\omega}(R/R_g) \neq 0$$
$$donc\ \vec{a}_e(M, R/R_g) \neq 0 \quad et/ou \quad \vec{a}_c(M, R/R_g) \neq 0$$

Les référentiels pour lesquels les accélérations $\vec{a}_e$ et $\vec{a}_c$ existent (donc non nulles) sont appelés des référentiels non Galiléens.

Tout référentiel en translation par rapport à un repère galiléen est galiléen.

- Tout référentiel est en fait non galiléen : le référentiel du manège est en rotation par rapport au référentiel terrestre qui est en rotation par rapport au référentiel géocentrique qui lui-même est en rotation par rapport au référentiel héliocentrique qui lui- même……***il faut donc juste savoir si les forces d'inerties ont une influence négligeable (dans ce cas, on assimilera le repère à un repère galiléen).***

Démonstration

Cherchons à établir une relation entre les différents référentiels Galiléens. Soit R_{g1} et R_{g2} deux référentiels Galiléens. Alors, d'après le principe de l'inertie valable dans tous les référentiels R_g :

$$\vec{a}\left(M/R_{g1}\right)=\vec{0} \quad et \quad \vec{a}\left(M/R_{g2}\right)=\vec{0}$$

$$or \quad \underbrace{\vec{a}\left(M/R_{g2}\right)}_{0}=\underbrace{\vec{a}\left(M/R_{g1}\right)}_{0}+\underbrace{\vec{a}_e\left(M,R_{g2}/R_{g1}\right)}_{\vec{a}\left(O_2/R_{g1}\right)+\left[\frac{d\vec{\omega}\left(R_{g2}/R_{g1}\right)}{dt}\right]_{Rg1}\wedge\overrightarrow{O_2M}+\vec{\omega}\left(R_{g2}/R_{g1}\right)\wedge\left(\vec{\omega}\left(R_{g2}/R_{g1}\right)\wedge\overrightarrow{O_2M}\right)}+\underbrace{\vec{a}_c\left(M,R_{g2}/R_{g1}\right)}_{2\vec{\omega}\left(R_{g2}/R_{g1}\right)\wedge\vec{v}\left(M/R_{g2}\right)}$$

$$soit \qquad \vec{a}_e\left(M,R_{g2}/R_{g1}\right)+2\vec{\omega}\left(R_{g2}/R_{g1}\right)\wedge\vec{v}\left(M/R_{g2}\right)=\vec{0}$$

Cette relation doit être valable pour tout point M et par conséquent pour toute position et toute vitesse. Si l'on considère le point M comme étant le centre O_2 du référentiel R_{g2}, nous pouvons écrire :

$$\vec{a}\left(O_2/R_{g1}\right)+2\vec{w}\left(R_{g2}/R_{g1}\right)\wedge\vec{u}\left(M/R_{g2}\right)=\vec{0}$$

$$\boxed{Galiléen \quad si \quad \vec{a}\left(O_2/R_{g1}\right)=\vec{0} \quad et \quad \vec{\omega}\left(R_{g2}/R_{g1}\right)=\vec{0}}$$

Donc finalement, si R_{g1} et R_{g2} sont des référentiels Galiléens, alors ils sont en translation rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre.

L'ensemble des référentiels Galiléen est constitué par des référentiels en translations rectiligne et uniforme par rapport à l'un d'entre eux.

Exemple :

Un manège est en rotation par rapport au référentiel lié à la place du village, qui lui-même est en rotation par rapport au référentiel lié à l'axe de rotation de la Terre, qui elle-même tourne autour du Soleil….Il faudra alors se demander si les accélérations $\vec{a}_e$ **et** $\vec{a}_c$ ont une influence négligeable ou non. Si elles sont négligeables, le référentiel pourra alors être considéré comme Galiléen.

3.2.2. Principaux référentiels considérés comme Galiléens.

Référentiel de Copernic R_C : Ce référentiel est celui qui s'apparente le plus à un référentiel Galiléen avec la plus grande précision. Son origine C est le centre de masse du

système solaire et les trois directions définissant sa base sont les directions de 3 étoiles suffisamment éloignées pour être considérées comme fixes.

Référentiel de Kepler R_K : Ce référentiel se déduit de R_C par translation. Compte tenu de la lenteur du mouvement du soleil (pour information, le Soleil fait un tour en 250 millions d'années, à une distance du centre égale à 28000 années-lumières), son centre S est le centre du soleil et ses axes sont parallèles à ceux de R_C. On appelle aussi ce référentiel un référentiel héliocentrique (en référence à Hélios, dieu Grec du soleil). R_K~R_C car les centres sont confondus. L'approximation consistant à supposer que R_K est Galiléen est en général excellente. La trajectoire de la Terre dans ce référentiel est, en première approximation, une ellipse située dans le plan de l'écliptique. Son excentricité très faible (e=0,017) en fait pratiquement un cercle. La distance moyenne de la Terre au Soleil porte le nom d'unité astronomique UA telle que 1UA = 149 597 871 km.

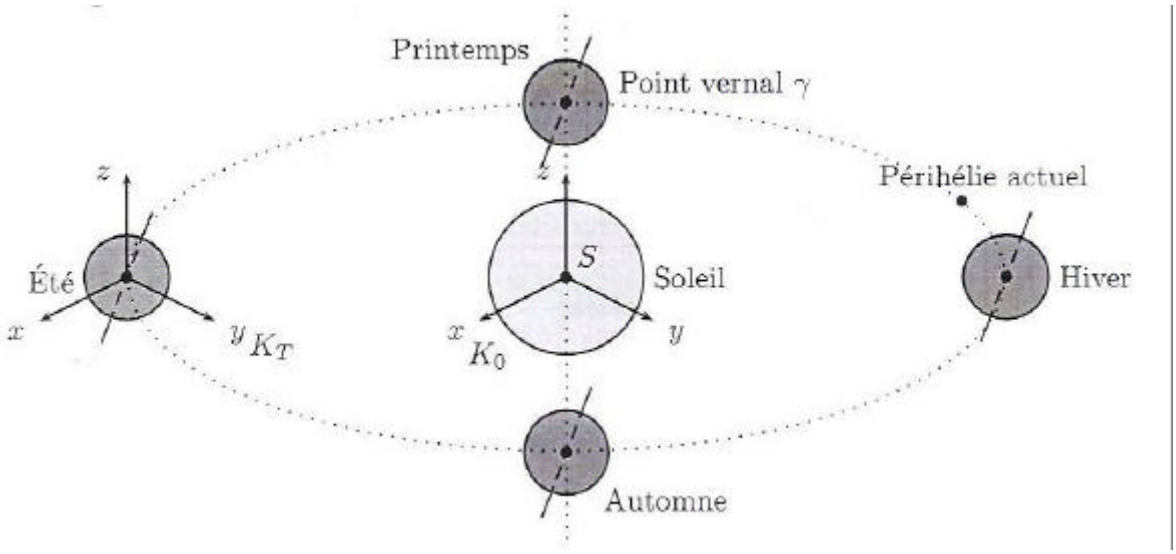


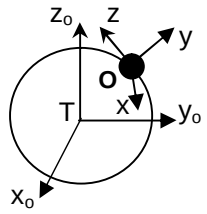
Figure 15 : Mouvement de la Terre autour du Soleil

Référentiel géocentrique R_g : Le référentiel géocentrique est en translation elliptique relativement au référentiel de Copernic. Ce référentiel R_g (T,x_o,y_o,z_o) a pour origine le centre T de la Terre, et ses axes sont toujours dirigés vers les trois étoiles fixes, parallèles à ceux de Copernic. Pourtant la Terre a un mouvement de rotation tel que son accélération dans R_C est non nulle. R_g n'est pas conséquent pas un référentiel Galiléen par définition. Néanmoins, on peut le considérer comme tel car les mouvements étudiés dans ce repère ont généralement des durées telles que la Terre est supposée n'avoir pas bougée.

Dans un mouvement de translation, nous verrons que l'accélération de Coriolis est nulle. On a donc uniquement besoin de connaître la seule accélération d'entraînement pour passer du référentiel de Copernic au référentiel géocentrique. En norme, cette accélération d'entraînement vaut 6.10^{-3} $m.s^{-2}$, c'est-à-dire 6.10^{-4} fois plus faible que l'accélération de la pesanteur au sol. On aura donc tendance à souvent négliger cette accélération d'entraînement sauf dans certains phénomènes très particuliers.

Référentiel Terrestre R : Ce référentiel a son origine O prise en un point de la surface de la Terre. Généralement, on désigne par O_z l'axe pris suivant la verticale ascendante (vers le

Zenith), O_x l'axe orienté suivant l'Est dans le plan horizontal et O_y l'axe orienté suivant le Nord.



La Terre tourne autour de son axe. R n'est pas Galiléen. Toutefois, suivant les expériences étudiées, R pourra être considéré comme Galiléen tout comme R_g.

Par conséquent, le référentiel R n'est pas galiléen. Considérons les mouvements de la Terre, en rotation autour de l'axe des Pôles en une journée. L'axe des Pôles n'est en fait pas exactement fixe, du fait des interactions avec la Lune, cet axe tourne, sa direction oscillant au maximum de 18'', avec une période de l'ordre de 19 ans environs. Le référentiel terrestre associé au repère est donc, relativement au référentiel géocentrique, en rotation autour de l'axe quasiment fixe des pôles à la vitesse angulaire ω, représentant la rotation diurne de la Terre. On doit donc étudier la dynamique dans ce référentiel, et prendre en compte les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis. Toutefois, les forces d'inertie d'entraînement $-m\vec{a}_e$ ne dépendent que de la position du point M. On les ajoute donc à la force de gravitation m**G** due à la Terre pour former la force de pesanteur m**g** = m (**G** – $\mathbf{a_e}$). Cette correction est maximale à l'équateur. Les forces d'inertie de Coriolis quand elles sont prises en compte, sont décrites par le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}_{R/Rc}$ relativement au référentiel de Copernic. Ce vecteur est dirigé selon l'axe des pôles, de norme $\omega = 2\pi/T_{Sid}$ où T_{Sid} est le jour sidéral, plus court d'un facteur 1/365 que le jour solaire moyen.

IV - DEUXIEME LOI DE NEWTON OU « PFD »

Cette deuxième loi est plus précise que la première puisqu'elle décrit l'influence des forces (quand elles existent) sur le mouvement d'un corps sur lequel elles s'appliquent. Son énoncé comprend deux parties : la RDF et la TMC (pour Théorème du Moment Cinétique)

4.1. LA RFD OU « RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE »

4.1.1. Enoncé :

Cette loi indique que les forces (la somme vectorielle des forces $\sum \vec{F}_i$) agissant sur un corps peut modifier la vitesse de ce corps au cours du temps. Elle est valable dans tout référentiel.

$$\sum F_i(j\ /R) = \left[\frac{d\vec{p}(M/R)}{dt}\right]_R \quad \text{avec} \quad \vec{p}(M/R) = m\cdot\vec{u}(M/R)$$

Où φ est un corps ponctuel de masse m situé en un point M. $\vec{p}$ est la quantité de mouvement ou résultante cinétique du corps ponctuel φ de masse m. S

Un point matériel M, de masse m constante au cours du temps (système fermé et système qui ne va pas trop vite…), soumis à une ou plusieurs actions extérieures dans le référentiel galiléen R, vérifie

$$\sum F_i(j\ /\ R) = \left[m \cdot \frac{d\vec{u}(M\ /\ R)}{dt} \right]_R = m \cdot \vec{a}(M\ /\ R)$$

Où la somme des forces porte sur les diverses interactions subies par M, chaque force F_i étant un invariant, indépendant du référentiel galiléen.

Remarque : la notion de système « qui ne va pas trop vite » est liée à la théorie de la relativité restreinte de Einstein (1905) qui donne la relation de la masse réelle m du corps en mouvement par rapport à la masse mo du corps au repos :

$$m = \frac{m_a}{\sqrt{\left(1 - u^2 / c^2\right)}}$$

Pour que m dépasse la masse au repos de 1%, il faut alors que la vitesse soit supérieures à $0.14V_{lumière}$, c'est-à-dire 42111 $km.h^{-1}$….autant dire que nous sommes bien en mécanique classique !

Commentaire :

- A force appliquée égale, un objet de masse plus importante qu'un autre aura une accélération plus faible : il réagira moins à la force. On dira que son inertie est plus grande.

Remarques :

- L'importance de cette loi a été comprise dès le 14ème siècle puisqu'elle a été introduite par le français Buridan vers 1330 pour expliquer que 2 boules de masse différente lancées à la même vitesse ne s'arrêtent pas avec la même facilité : il avait compris qu'il fallait prendre en compte la vitesse mais aussi la masse du corps, tous deux définis dans un référentiel.

- La masse indique combien de matière il y a dans un corps matériel, c'est-à-dire combien il y a d'électrons, de protons et de neutrons dans l'objet étudié (surtout les nucléons qui ont une masse 1800 fois plus importante que celle des électrons).

- La masse est la même en tout point de l'Univers et s'exprime en kg alors que le poids est une force qui s'exprime en Newton et qui dépend de la masse qui attire (Terre, Lune….). La balance n'indique pas un poids mais une masse et mesure en réalité une force exercée sur une surface. En toute rigueur, une personne qui pèse 70kg est en fait une personne de masse est 70kg qui pèse sur Terre 70x9.81=687Newtons ou 70x1.58=110.6Newtons sur la Lune, c'est-à-dire 6 fois moins !

- La masse utilisée dans cette loi par Newton est qualifiée de masse inerte (pour inertie !!) . Cet adjectif a pour but de la différentier de la masse qui intervient dans la force de gravitation et que l'on nomme masse grave (pour gravité !!).Ces deux

grandeurs ne sont à priori pas identiques mais le sont en réalité comme l'a montré Einstein dans la formulation de la Relativité Générale. On parlera donc de masse !

- On parle ici de forces appliquées en un point. Pour un système composé de plusieurs points matériels, les forces considérées sont les forces extérieures.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{dP_{sys/R}}{dt}$$

Il est donc important de faire la différence entre les forces extérieures et les forces intérieures. Si par exemple la somme des forces extérieure est nulle, alors P est constante. Ainsi il n'est pas possible de faire avancer une voiture en la poussant de l'intérieur. De même, une force peut dépendre du temps. Par exemple, lorsque l'on pose le pieds sur le sol, la force exercée sur le sol varie au cours du temps lors du pas (en partant de zéro, passant par un maximum pour retomber à zéro). On parle alors d'impulsion et c'est cette impulsion qui va nous renseigner vraiment sur l'effet du mouvement. Par exemples : reprise de volée au football (8ms), service au tennis (4ms), swing au golf (1ms).

4.1.2. Forces d'inertie

Dans l'énoncé précédent de la RFD, nous avons précisé que la relation était valable quelque soit le référentiel choisi. Considérons alors un manège tournant à vitesse constante ω et un pendule accroché à l'axe de rotation. Si l'on se place sur le manège, le pendule n'apparaît pas vertical mais incliné. Considérons donc deux référentiels, un référentiel R galiléen rattaché à une vue du ciel, et R' un référentiel non galiléen rattaché au manège. Le référentiel du manège tourne à la vitesse ω dans le référentiel R. Nous pouvons alors écrire que :

$$\sum \vec{F}_{vue\ de\ puis\ R'}(M/R') = \underbrace{\sum \vec{F}_{vue\ de\ puis\ R}(M/R)}_{"Forces\ \ Vraies"} + \underbrace{\vec{F}_{ie}(M,R'/R)}_{-m\cdot\vec{a}_e(M/R')} + \underbrace{\vec{F}_{ic}(M,R'/R)}_{-m\cdot\vec{a}_c(M/R')}$$

Démonstration :

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{vue\ de\ puis\ R}(M/R) = m\cdot\left[\dfrac{d\vec{u}(M/R)}{dt}\right]_R = m\cdot\vec{a}(M/R) \\ \sum \vec{F}_{vue\ de\ puis\ R'}(M/R') = m\cdot\left[\dfrac{d\vec{u}(M/R')}{dt}\right]_{R'} = m\cdot\vec{a}(M/R') \end{cases}$$

Or, en cinématique, nous avons démontré la loi de composition des accélérations, à savoir :

$$\vec{a}(M/R) = \vec{a}(M/R') + \vec{a}_e(M,R'/R) + \vec{a}_c(M,R'/R)$$

Où $\vec{a}_e(M,R'/R)$ et $\vec{a}_c(M,R'/R)$ sont respectivement les accélérations d'entraînement et de Coriolis définies par :

$$\vec{a}_e(M,O'/R)=\vec{a}(O'/R)+\left[\frac{d\vec{w}(R'/R)}{dt}\right]_{R'}\wedge\vec{O'M}+\vec{w}(R'/R)\wedge\left(\vec{w}(R'/R)\wedge\vec{O'M}\right)$$
$$\vec{a}_c(M,R'/R)=2\vec{w}(R'/R)\wedge\vec{u}(M/R')$$

On peut donc écrire la somme des forces (vues depuis R') en fonction de la somme des forces (vues depuis R).

$$\begin{cases}\sum\vec{F}_{vue\ de\ puis\ R}(M/R)=m\cdot\vec{a}(M/R)=m\cdot\left[\vec{a}(M/R')+\vec{a}_e(M,R'/R)+\vec{a}_c(M,R'/R)\right]\\ soit\\ \sum\vec{F}_{vue\ de\ puis\ R'}(M/R')=\sum\vec{F}_{vue\ de\ puis\ R}(M/R)\underbrace{-m\cdot\vec{a}_e(M/R')}_{\vec{F}_{ie}(M,R'/R)}\underbrace{-m\cdot\vec{a}_c(M/R')}_{\vec{F}_{ic}(M,R'/R)}\end{cases}$$

Par conséquent, lorsque l'on appliquera le RFD à un référentiel qui n'est pas galiléen, il faudra ajouter dans le bilan des forces les forces « fictives » d'inertie $\vec{F}_{ie}(M,R'/R)$ ***et*** $\vec{F}_{ic}(M,R'/R)$ ***telles que :***

$$\sum\vec{F}_{vue\ de\ puis\ R'}(M/R')=\underbrace{\sum\vec{F}_{vue\ de\ puis\ R}(M/R)}_{"Forces\ \ Vraies"}+\underbrace{\underbrace{\vec{F}_{ie}(M,R'/R)}_{-m\cdot\vec{a}_e(M/R')}+\underbrace{\vec{F}_{ic}(M,R'/R)}_{-m\cdot\vec{a}_c(M/R')}}_{"Forces\ \ Fictives"}$$

$\vec{F}_{ie}(M,R'/R)$ ***: force d'inertie d'entraînement.***

$\vec{F}_{ic}(M,R'/R)$ ***: force d'inertie de Coriolis.***

Fin cours 7

<u>Exemple du manège et du pendule :</u>

Quand on est sur un manège tournant à vitesse constante, un pendule accroché à l'axe de rotation du manège n'apparaît pas vertical. Le bilan des forces nous donne donc le poids du pendule $\vec{P}=m\vec{g}$, la tension du fil (réaction du fil sur le pendule), $\vec{F}_{ie}$ (vitesse constante de rotation et accélération nulle de O'dans R) et $\vec{F}_{ic}=\vec{0}$ car la vitesse $\vec{u}_{M/R}=\vec{0}$ vu que le pendule est immobile pour un observateur sur le manège, c'est-à-dire dans le référentiel R' (je tourne avec). Par contre, mon manège tourne dans R (ω). Cette dernière force Fie est connue sous le nom de ***force centrifuge***. Pourtant $\sum\vec{F}\neq 0$. Quelles sont donc les forces que nous avons oubliées qui permettraient de vérifier que l'immobilité du pendule se traduise par un bilan des forces nul ? ***<u>Les forces d'inertie !</u>***

- Si $\vec{a}_c$ est nul, alors le référentiel R' n'est pas en rotation par rapport au référentiel R.

- Si $\vec{a}_e$ est nul aussi, le référentiel R' n'est ni en rotation, ni en translation par rapport au référentiel R.

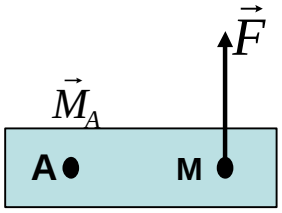
- Dans tous les autres cas (rotation et/ou translation non uniforme), le référentiel sera non galiléen. Mais dans ce cas, tout référentiel est non galiléen : le référentiel du manège est en rotation par rapport au référentiel terrestre qui est en rotation par rapport au référentiel géocentrique qui lui-même est en rotation par rapport au référentiel héliocentrique qui lui- même……***il faut donc juste savoir si les forces d'inerties ont une influence négligeable (dans ce cas, on assimilera le repère à un repère galiléen).***

4.2. LA TMC OU « THEOREME DU MOMENT CINETIQUE ».

4.2.1. Moment d'une force

Comment décrire la capacité d'une force à mettre en rotation un point matériel M ? Réponse : par **son Moment** ! Ce qui va compter le plus ici sera la distance $\vec{AM}$ du point M à l'axe de rotation et la composante de la force perpendiculaire à cette direction $\vec{AM}$. Le moment d'une force permet de caractériser l'action d'une force sur un corps en rotation et la facilité à mettre ce corps en mouvement.

Définition : Soit une force $\vec{F}$ s'appliquant en un point matériel M (appelé centre de Poussée de $\vec{F}$). On définit le moment $\vec{M}_A$ de la force $\vec{F}$ s'exerçant sur un point matériel M (point d'application) et calculé en un point A d'un référentiel R par le vecteur :



$$\vec{M}_A(\vec{F}/R) = \vec{AM} \wedge \vec{F}$$

Ce moment est une grandeur vectorielle portée par l'axe de rotation dont l'unité est N.m. Il est indépendant de la position de A sur la droite d'action.

Exemple :

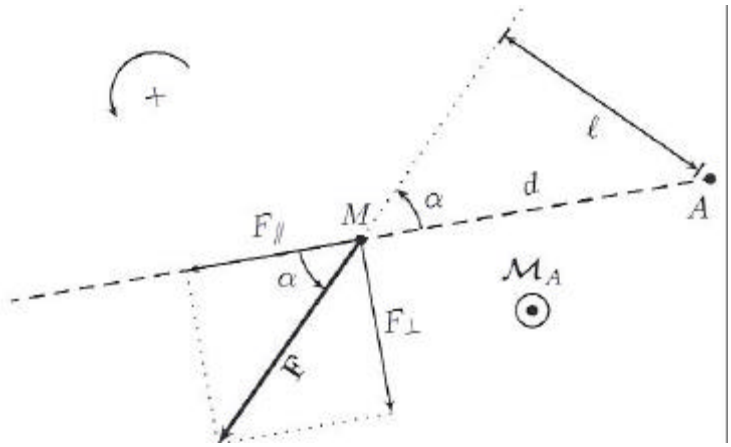


Figure X : Moment d'une force

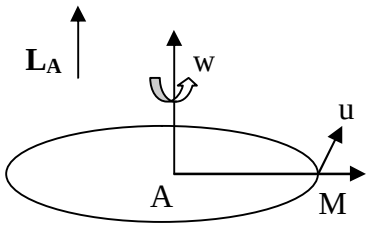
On peut exprimer la mesure de ce moment de forces $M_A = \left\| \vec{M}_A(\vec{F}/R) \right\|$ de deux façons différentes : $M_A = dF_\perp$ (en fonction de d=AM et de la composante orthoradiale $F_\perp$ de la force), ainsi que $M_A = \ell F$ (en fonction de la norme $F = \left\| \vec{F} \right\|$ de la force exercée, et du bras de levier ℓ, distance de A à la droite d'action de la force, droite passant par le point d'application M et dirigée par $\vec{F}$. Ces deux expressions sont bien équivalentes puisque $\ell = d \cdot \sin a$ et $F_\perp = F \cdot \sin a$. Il suffit alors de compléter la détermination de la norme M_A par celle de la direction du vecteur $\vec{M}_A$ pour définir complètement ce moment de force ; cette direction est celle autour de laquelle la force ferait tourner le point M, relativement au centre A.

4.2.2. Moment cinétique

Soit un point M de masse m et animé d'une vitesse $\vec{u}(M/R)$. On définit le moment cinétique d'un point matériel M en un point A du référentiel R par le moment de sa quantité de mouvement $\vec{p}$ vecteur, soit :

$$\vec{L}_A(M/R) = \vec{AM} \wedge \vec{p}(M/R)$$

Pour un mouvement plan circulaire comme représenté sur la figure suivante, nous avons :



$$\vec{L}_A(M/R) = m\vec{w}$$

4.2.3. Théorème du moment cinétique

Soit A un point fixe dans le référentiel R :

$$\left[\frac{d\vec{L}_A(M/R)}{dt}\right]_R = \frac{d}{dt}\left[\vec{AM}\wedge m\vec{u}(M/R)\right]_R$$

$$\left[\frac{d\vec{L}_A(M/R)}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\,\vec{AM}}{dt}\right]_R \wedge m\vec{u}(M/R) + \vec{AM}\wedge\left[\frac{d}{dt}m\vec{u}(M/R)\right]_R$$

$$\left[\frac{d\vec{L}_A(M/R)}{dt}\right]_R = \left(\left[\frac{d\,\vec{AO}}{dt}\right]_R + \left[\frac{d\,\vec{OM}}{dt}\right]_R\right)\wedge m\vec{u}(M/R) + \vec{AM}\wedge \underbrace{m\vec{a}(M/R)}_{\sum\vec{F}(M/R)}$$

$$\left[\frac{d\vec{L}_A(M/R)}{dt}\right]_R = \underbrace{\left[\frac{d\,\vec{AO}}{dt}\right]_R \wedge m\vec{u}(M/R)}_{\vec{O}\ car\ A\ est\ fixe} + \underbrace{\left[\frac{d\,\vec{OM}}{dt}\right]_R \wedge m\vec{u}(M/R)}_{\vec{u}(M/R)\times m\vec{u}(M/R)=\vec{0}} + \vec{AM}\wedge\sum\vec{F}(M/R)$$

Donc $$\boxed{\left[\frac{d\vec{L}_A(M/R)}{dt}\right]_R = \underbrace{\vec{AM}\wedge\sum\vec{F}(M/R)}_{moment\ de\ la\ somme\ des\ forces} = \underbrace{\sum\vec{M}_A(\vec{F}/R)}_{Somme\ \ des\ \ moments}}$$

Si $\frac{d}{dt}\left[\vec{L}_A(M/R)\right]_R = \vec{0}$ alors $\vec{L}_A(M/R) = C^{ste}$ donc $\vec{AM}$ et $\vec{u}(M/R)$ sont dans le même plan, **le mouvement est plan**.

Rq : Le choix du point A ici est arbitraire. **Le théorème marche en tout point tant que A est fixe.** On choisira donc le point qui rend les calculs les plus simples possibles.

4.3. EXEMPLES

- ***Masse accrochée à un ressort vertical :***

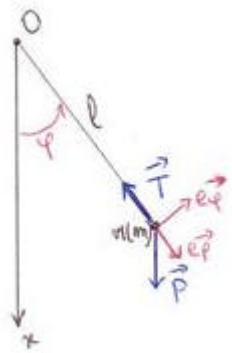
Nous sommes en présence d'un mouvement en translation :
$\vec{P}+\vec{T} = m\vec{a}(M/R)$

Soit l'équation de mouvement : $\boxed{mg - k(x-\ell_o) = m\ddot{x}}$

En appliquant la TMC au point O fixe, toutes les forces et le poids sont portées par l'axe Ox.

$\vec{M}_O(\vec{F}/R) = \vec{0}$ et $\vec{L}_O(\vec{F}/R) = \vec{0}$ donc TMC vérifiée !

- ***Oscillation du pendule***



On applique la RFD au système :

$$\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}(M/R) \quad \text{avec } \vec{OM}=\ell\vec{e}_r \rightarrow \vec{u}(M/R)=\ell\dot{j}\,\vec{e}_j$$

$$\vec{a}(M/R)=\ell\ddot{j}\,\vec{e}_j-\ell\dot{j}^2\,\vec{e}_r$$

$$\vec{T}=-\left\|\vec{T}\right\|\cdot\vec{e}_\rho \quad avec \quad \left\|\vec{T}\right\|>0 \quad \text{et} \quad \vec{P}=\left\|\vec{P}\right\|\left(\cos j\,\vec{e}_j-\sin j\,\vec{e}_j\right)$$

$$\text{Donc} \begin{cases} P\cdot\cos j-T=-m\ell\dot{j}^2 & suivant\ \vec{e}_r \\ -P\cdot\sin j=m\ell\ddot{j} & suivant\ \vec{e}_j \end{cases}$$

D'où l'équation du mouvement : $\boxed{\ddot{j}+\frac{g}{\ell}\sin j=0}$

En appliquant la TMC au point O fixe, nous avons :

$$\vec{M}_O(\vec{T}/R)=\vec{0}=\vec{OM}\wedge\vec{T} \quad \text{et} \quad \vec{M}_O(\vec{P}/R)=\vec{OM}\wedge\vec{P}$$

$$\vec{M}_O(\vec{P}/R)=\vec{OM}\wedge\vec{P}=\ell\vec{e}_r\wedge P\left(\cos j\,\vec{e}_j-\sin j\,\vec{e}_j\right)=-\ell P\sin j\,\vec{e}_z$$

$$\vec{L}_O(M/R)=\vec{OM}\wedge m\vec{u}(M/R)=\ell\vec{e}_r\wedge m\ell\dot{j}\,\vec{e}_j=m\ell^2\dot{j}\,\vec{e}_z$$

Donc en appliquant le théorème du moment cinétique, c'est-à-dire en effectuant la dérivée, nous avons :

$$\left[\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt}\right]_R=\left[\frac{d}{dt}\left(m\ell^2\dot{j}\,\vec{e}_z\right)\right]_R=m\ell^2\ddot{j}\,\vec{e}_z \quad car\ \vec{e}_z\ fixe\ dans\ R.$$

$$\text{Soit} \left[\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt}\right]_R=\sum M(\vec{F}/R) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{\varphi}+\frac{g}{\ell}\sin\varphi=0}$$

V – TROISIEME LOI DE NEWTON OU « PRINCIPE DE L'ACTION - REACTION »

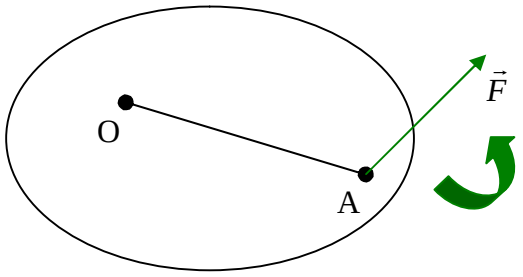
La réaction est toujours contraire à l'action. L'action s'oppose à la réaction. Les actions que deux corps exercent l'un sur l'autre sont toujours égales et dirigées en sens contraire.

Si un point matériel M_1 exerce une force $\vec{F}_{12}$ sur un autre point matériel M_2, alors le point matériel M_2 exerce lui aussi une force $\vec{F}_{21}$ sur le point matériel M_1 telle que $\boxed{\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}}$.

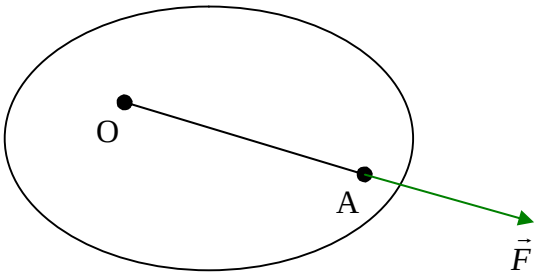
VI – NOTION D'EQUILIBRE, DE ROTATION ET DE VIBRATION

Tout mouvement d'un point dans l'espace peut se décomposer en un mouvement de rotation et un mouvement de translation.

La connaissance de la somme des forces s'exerçant sur un solide renseignera sur la modification de son mouvement de translation. La connaissance de la somme des moments des forces s'exerçant sur le point renseignera sur la modification de son mouvement en rotation. L'absence de translation se traduira donc par une somme de forces nulle et l'absence de rotation par une somme des moments des forces nulle.



En rotation



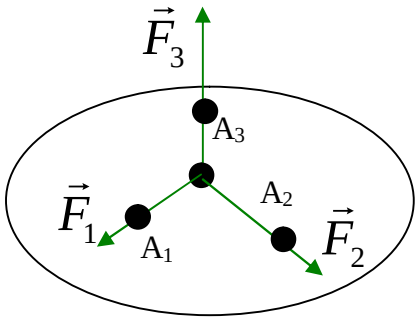
Sans rotation

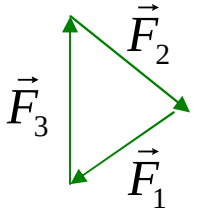
En effet, toute force $\vec{F}$ ayant A comme point d'application sur un objet dont l'axe de rotation passe par un point O mettra ce solide en rotation autour ce cet axe tant que le vecteur $\vec{OA}$ ne sera pas colinéaire au vecteur force $\vec{F}$. La rotation s'arrêtera quand les vecteurs seront colinéaires, donc quand le produit vectoriel sera nul, c'est-à-dire quand le moment de la force sera nul.

6.1. L'EQUILIBRE.

L'objet ne pourra être maintenu dans son état d'équilibre que s'il n'est pas soumis à un mouvement de translation et/ou de rotation. Cela se traduit mathématiquement par :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad et \quad \sum \vec{M}_o = \vec{0}$$





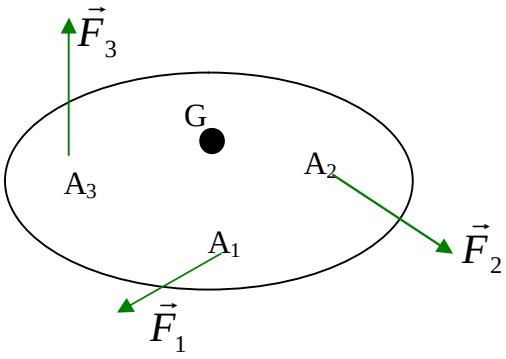
$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

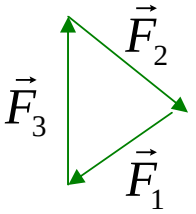
6.2. LA ROTATION.

La modification du mouvement d'un objet, soumis à un ensemble de forces nulle mais de moment total non nul sera une rotation. Cela se traduit par :

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0} \quad et \quad \sum \vec{M}_o \neq \vec{0}}$$

Un solide initialement en translation et soumis à une rotation restera en translation mais subira également une rotation.





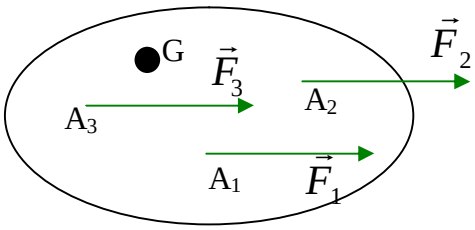
$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}}$$

6.3. LA TRANSLATION.

La modification du mouvement d'un solide, soumis à un ensemble de forces non nulles mais de moment total nul sera une translation. Cela se traduit par :

$$\boxed{\sum \vec{F} \neq \vec{0} \quad et \quad \sum \vec{M}_o = \vec{0}}$$

Un solide initialement en rotation et soumis à une translation restera en rotation mais subira également une translation.



VII – UN PEU DE DYNAMIQUE TERRESTRE.

Notre référentiel cartésien – celui de Descartes sur son lit – lié à la longueur, largeur et hauteur de la salle de TD par exemple, qui nous apparaissent fixes au cours du temps, n'est pas Galiléen dans l'absolu (la Terre tourne) : il est posée sur la surface de la Terre qui tourne sur elle-même…

Si beaucoup de problèmes de mécanique du point conduisent à négliger les forces d'inertie dues à l'aspect non galiléen de notre référentiel de tous les jours et donc à l'assimiler à un référentiel Galiléen, certains phénomènes à la surface du globe ne trouvent au contraire leurs explications que dans les forces d'inertie qui pour eux, ne sont plus négligeables.

Evoquons-en 3 :

- le pendule de Foucault que nous ne traiterons pas,
- la déviation vers l'Est de tout objet lâché en chute libre
- l'enroulement des nuages ; c'est ce dernier exemple que nous développerons dans cette partie

Finalement, nous voilà face à trois cas troublants où le manège est remplacé par notre manège à nous, la Terre. Pour comprendre cela, présentons nos outils : le référentiel relatif qui sera utilisé (le référentiel terrestre) et le référentiel absolu (le référentiel géocentrique).

7.1. LE REFERENTIEL GEOCENTRIQUE RG ET SON REPERE ASSOCIE :

Comme son nom l'indique, son origine T est prise au centre de la Terre et nous appellerons $\vec{e}_{xo}, \vec{e}_{yo}, \vec{e}_{zo}$ les trois axes définissant la base. $\vec{e}_{zo}$ est pris selon l'axe de rotation de la Terre, dirigé vers le Pôle Nord. Les deux autres sont donc dans le plan de l'équateur et chacun d'eux dirigé vers une étoile particulière. La Terre en rotation va donc tourner par rapport à ce référentiel (qui n'a d'absolu, que le nom : la Terre tournant aussi autour du Soleil, le référentiel géocentrique est en rotation par rapport à un référentiel héliocentrique etc….).

7.2. LE REFERENTIEL TERRESTRE R ET SON REPERE ASSOCIE

- Son origine O est prise à la surface de la Terre. $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont les trois axes définissant la base. $\vec{e}_z$ est pris selon la verticale montante définie en O (concrètement la verticale locale est donnée par la direction du fil à plomb et correspond à la direction de la force poids, $\vec{P} = m\vec{g}$). $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ définissent alors le plan appelé plan horizontal, avec $\vec{e}_z$ dirigé vers l'Est et $\vec{e}_y$ dirigé vers la Pôle Nord. On voit que ce référentiel ressemble au référentiel cartésien sauf que $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ ne correspondent par forcément à la longueur et à la largeur de la pièce.

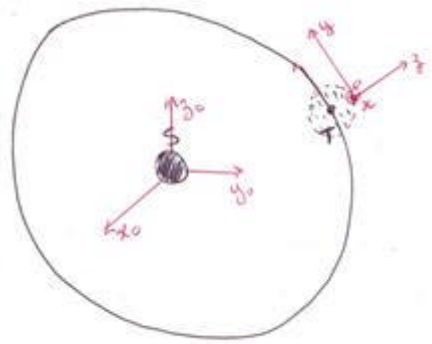
- La Terre décrit en 1 an une orbite circulaire autour du Soleil, de rayon environ 1,5.1011 m (=1ua), soit 30km/s. La Terre est animée d'un mouvement de rotation sur elle-même et également en rotation par rapport à Rg. Nous pouvons définir $\vec{w}_{R/R_g}$. R est en rotation autour de l'axe des Pôles et $w_{R/R_g} = w\,\vec{e}_z$. La rotation s'effectue vers l'Est (puisque le Soleil se lève à l'Est). $\vec{w}_{R/R_g}$ a donc le même sens que $\vec{e}_{zo}$ (vers le Pôle Nord). La rotation complète s'effectue en 24h, soit une vitesse angulaire de $2p\,/(24\times3600) = 7{,}27.10^{-5}\,rad.s^{-1}$. Donc à priori, R n'est pas Galiléen. Si l'on considère un point M dans R, la RFD nous donne :

$$\sum \vec{F}(M/R_c) = -m\vec{a}_e(M,R/R_c) - m\vec{a}_c(M,R/R_c) = m\vec{a}(M/R)$$

Il faut donc évaluer l'influence des forces d'inertie dans le référentiel R !
Par définition, les forces d'inerties sont $\vec{F}_{ie}$ et $\vec{F}_{ic}$. Intéressons nous ici à $\vec{F}_{ie}$

$$\vec{F}_{ie}(M,R/R_c) = -m\vec{a}_e(M,R/R_c)$$

$$\vec{F}_{ie}(M,R/R_c) = -m\left[\left(\frac{d^2\vec{SO}}{dt^2}\right)_{R_c} + \left(\frac{d\vec{w}(R/R_c)}{dt}\right)_{R_c}\right]\times\vec{OM} + \vec{w}(R/R_c)\times\left(\vec{w}(R/R_c)\times\vec{OM}\right)$$



$$\left(\frac{d^2\vec{SO}}{dt^2}\right)_{R_c} = \left(\frac{d^2\vec{ST}}{dt^2}\right)_{R_c} + \left(\frac{d^2\vec{TO}}{dt^2}\right)_{R_c}$$

où le second membre n'est autre que l'accélération de T dans R_c. Or T a un mouvement circulaire donc l'accélération est normale telle que :

$$a_N = \left\| \left(\frac{d^2\vec{ST}}{dt^2}\right)_{R_c} \right\| = \frac{u^2}{R} = \frac{300.10^8}{1{,}5.10^{11}} = 6.10^{-6}\, km/s^2 = 6 mms^{-2}$$

$\left(\frac{d^2\vec{TO}}{dt^2}\right)_{R_c} = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\vec{TO}}{dt}\right)_R + \vec{w}(R/R_c)\wedge\vec{TO}\right]$ avec $\vec{TO} = TO.\vec{e}_z$ où TO est fixe dans le référentiel R

$$\left(\frac{d^2\vec{TO}}{dt^2}\right)_{R_c} = \frac{d}{dt}\left(\vec{w}(R/R_c)\wedge\vec{TO}\right)_{R_c} = \vec{w}(R/R_c)\wedge\left(\vec{w}(R/R_c)\wedge\vec{TO}\right)$$

Donc finalement, $\vec{F}_{ie}(M,R/R_c) = -m\left[a(T/Rc) + \vec{w}(R/R_c)\wedge\left(\vec{w}(R/R_c)\wedge\left(\vec{TO}+\vec{OM}\right)\right)\right]$

$$\boxed{\vec{F}_{ie}(M,R/R_c) = -m\left[a(T/Rc) + \vec{w}(R/R_c)\wedge\left(\vec{w}(R/R_c)\wedge\vec{TM}\right)\right]}$$

Bilan des forces et pesanteur

$\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\left(\vec{w}\wedge\vec{u}_{O/R}\right)$ et $\vec{F}_{ie}(M,R/R_c) = -m\left[a(T/Rc) + \vec{w}(R/R_c)\wedge\left(\vec{w}(R/R_c)\wedge\vec{TM}\right)\right]$

$$\sum\vec{F}(M/R_c) = \underbrace{m\vec{g}(M)}_{\text{force de gravitation}} + \underbrace{\vec{F}_{appl}}_{\text{autres forces appliquées}} \quad \text{avec} \quad \vec{g}(M) = \vec{g}_T(M) + \underbrace{\vec{g}_S(M)}_{\text{dû au Soleil}} + \underbrace{\vec{g}_L(M)}_{\text{dû à la Lune}}$$

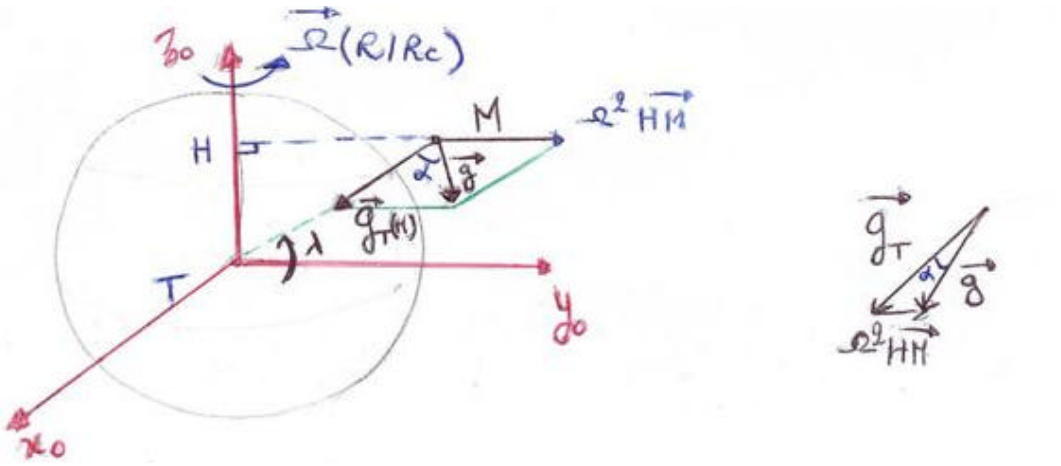
La RFD s'applique pour tout point M, donc également pour la Terre. En supposant que toute la masse M_T de la Terre est concentrée en T, nous pouvons écrire que :

$$M_T\cdot\vec{a}(T/R_c) = \sum\vec{F}(T/R_c) = M_T\cdot\left(\vec{g}_S(M) + \vec{g}_L(M)\right)$$

Donc la RFD appliquée au point M nous donne :

$$m\cdot\vec{a}(M/R) = m\left(\vec{g}_T(M) + \vec{g}_S(M) + \vec{g}_L(M)\right) + \vec{F}_{appl} - 2m\left(\vec{w}_{R/R_c}\wedge\vec{u}_{M/R}\right)$$
$$- m\left(\vec{g}_S(T) + \vec{g}_L(T) + \vec{w}_{R/R_c}\wedge\left(\vec{w}_{R/R_c}\wedge\vec{TM}\right)\right)$$

Si l'on considère le point H comme étant le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation de la Terre, porté par le vecteur rotation $\vec{w}_{R/R_c}$



$$m\vec{a}(M/R) = m\left(\vec{g}_T(M) + w^2\,\vec{HM}\right) + \vec{F}_{appl} - 2m\left(\vec{w}_{R/R_c} \times \vec{u}_{M/R}\right) + m\left[\vec{g}_S(M) - \vec{g}_S(T)\right] + m\left[\vec{g}_L(M) - \vec{g}_L(T)\right]$$

le terme $\left[\vec{g}_S(M) - \vec{g}_S(T)\right] + \left[\vec{g}_L(M) - \vec{g}_L(T)\right]$ est appelé terme différentiel et permet d'expliquer le phénomène des marées. On simplifie généralement cette expression en introduisant la notion de pesanteur. Par définition, le poids $\vec{P}$ est l'opposé de la force qu'il faut appliquer à un point matériel M de masse m pour qu'il soit en équilibre dans le référentiel terrestre local.

Equation dans le référentiel R :

$$\vec{u}(M/R) = \vec{0} \quad et \quad \vec{a}(M/R) = \vec{0}$$

Donc la RFD devient : $m\vec{a}(M/R) = m\left(\vec{g}_T(M) + w^2\,\vec{HM}\right) + \vec{F}_{appl} + m[termes\ différentiels] = \vec{0}$

$$\vec{P} = -\vec{F}_{appl} = m\left(\vec{g}_T(M) + w^2\,\vec{HM}\right) + m[termes\ différentiels]$$

Le calcul de chacun de ces termes montre que les termes différentiels est 10^{-7} fois plus petit que $\left\|\left(\vec{g}_T(M) + w^2\,\vec{HM}\right)\right\|$. Par conséquent, il est généralement négligé et on pose $\vec{g}(M) = \vec{g}_T(M) + w^2\,\vec{HM}$ le champ de pesanteur terrestre au point matériel M.

Soit M un point de la surface terrestre.

- Si M est sur les pôles alors $\vec{HM} = \vec{0}$, nous avons $\vec{g}(pôles) = \vec{g}_o = \vec{g}_T(pôles) = G\dfrac{M_T}{R_T^{\,2}} = 9{,}80665 ms^{-2}$

- Si M est sur l'équateur, $\vec{g}_T$ et $\vec{HM}$ sont directement opposés et $\|\vec{g}\|$ prend sa valeur minimale. $g_{\min} = g_T - \Omega^2 R_T = 9{,}80665 - 3{,}36.10^{-2} = 9{,}77305 ms^{-2}$

La déviation α entre $\vec{g}(pôles) = \vec{g}_o = \vec{g}_T(pôles) = G\frac{M_T}{R_T^{\,2}} = 9{,}80665 ms^{-2}$ et $\vec{g}(pôles) = \vec{g}_o = \vec{g}_T(pôles) = G\frac{M_T}{R_T^{\,2}} = 9{,}80665 ms^{-2}$ est nulle aux pôles et à l'équateur. Elle est maximale pour une latitude de λ=45°. Les calculs montrent que α_{max}=5,9' est très faible et qu'elle sera généralement négligée.

Il en résulte finalement que $\vec{g}$ est généralement pris selon $\vec{g}_T$ donc selon la verticale descendante. Lors du bilan des forces, on fait intervenir soit $(\vec{F}_{\text{int}} + \vec{F}_{ie})$ soit le poids $\vec{P}$ et non $\vec{F}_{ie} + \vec{P}$ ou encore $\vec{F}_{\text{int}} + \vec{P}$.

Généralement on négligera les variations de $\vec{g}$ avec la latitude et avec l'altitude : $g \approx g_o \approx 9{,}81 ms^{-2}$.

- ***<u>Autre démonstration : masse à l'équilibre au bout d'un fil :</u>***

Dans le référentiel terrestre, observons une masse à l'équilibre au bout d'un fil. Bilan des forces qu'elle subit :

- la force de gravitation $\vec{F}_g = m\vec{g}$.
- La tension du fil **T**
- $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$ ($\vec{F}_{ic}$ est nulle car $\vec{u}_{masse/R} = 0$), force centrifuge comme pour le manège.

La force $\vec{F}_g + \vec{F}_{ie}$ qui est compensée par $\vec{T}$ (équilibre donc $\sum \vec{F} = 0$) est appelée le poids $\vec{P}$. Donc en toute rigueur, $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}_e) = m\vec{g}$ n'est pas que le résultat de la force de gravitation.

On retiendra donc que dans le référentiel terrestre, la force d'inertie d'entraînement est déjà prise en compte dans le poids et qu'il n'y a donc à prendre en compte si besoin est, que la force de Coriolis. Dans le cas du manège par exemple, nous avons pris en compte la force d'entraînement car le référentiel du manège <u>n'était pas le référentiel terrestre</u>.

7.3. Influence de la force d'inertie de Coriolis

Pour que $\vec{F}_{ic}$ ne soit pas négligeable devant le poids, il faut atteindre des vitesses $\vec{u}$ très élevées. En effet :

$$\frac{\|\vec{F}_{ic}\|}{mg_o} = \frac{\|-2m\cdot\vec{\Omega}(R/R_c)\wedge\vec{u}(M/R)\|}{mg_o} = \frac{2mu\cdot\Omega}{mg_o} = \frac{2u\cdot\Omega}{g_o} = \frac{u}{6{,}7.10^4}$$

Ainsi si υ = 700ms^{-1} (2500km.h^{-1}), $\vec{F}_{ic}$ =1% du poids. Les effets de cette force seront mises en évidence dans des cas très particuliers de masses importantes (études atmosphériques, cyclones). Lors d'expériences à grandes durées, ou encore demandant une très grande précision, $\vec{F}_{ic}$ peut avoir différentes actions et permet d'expliquer le mouvement des vents, les courants océaniques, ou encore l'usure inégale des rails d'un chemin de fer ! Cette force a été mise en évidence par Foucault en 1851.

- ***Cas de la chute verticale d'un objet :***

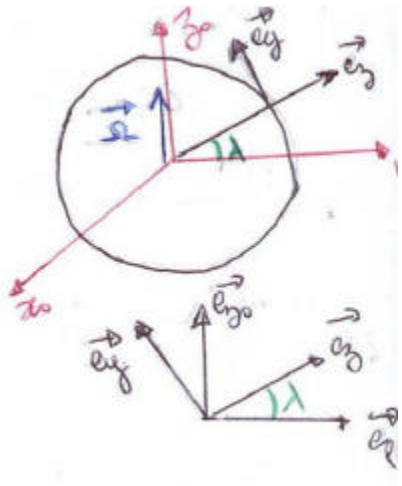
Pour constater de l'influence de $\vec{F}_{ic}$, considérons simplement la chute verticale d'un objet ; M(m) est laché sans vitesse initiale, depuis une hauteur ℓ en un point de latitude l. On néglige ici les frottements de l'air. Ainsi, d'après la RFD :

$$\cancel{m}\vec{a}(M/R) = \cancel{m}\vec{g} - 2\cancel{m}\cdot\vec{\Omega}(R/R_o)\wedge\vec{u}(M/R)$$

(pas de $\vec{F}_{ie}$ qui est comprise dans $\vec{g}$)

$$\vec{\Omega}(R/R_o) = \Omega\,\vec{e}_{z_o} = \Omega\cdot\left(\sin l\ \vec{e}_z + \cos l\ \vec{e}_y\right)$$

$$\vec{a}_c = -2\Omega\cdot\begin{vmatrix}0\\ \cos l\\ \sin l\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{vmatrix} = -2\Omega\cdot\begin{vmatrix}\dot{z}\cdot\cos l - \dot{y}\cdot\sin l\\ \dot{x}\cdot\sin l\\ \dot{x}\cdot\cos l\end{vmatrix}$$



En projetant sur les 3 axes, on obtient :

$$\begin{cases}\ddot{x} = -2\Omega\cdot\left(\dot{z}\cdot\cos l - \dot{y}\cdot\sin l\right)\\ \ddot{y} = -2\Omega\cdot\dot{x}\cdot\sin l\\ \ddot{z} = -g + 2\Omega\cdot\dot{x}\cdot\cos l\end{cases}$$

En prenant comme conditions intiales t=0 que la vitesse est nulle ($\vec{u}(t=0) = \vec{0}$, soit

$$\begin{cases}\ddot{z}(t=0) = -g \quad\rightarrow\quad \dot{z}(t=0) = -gt(+0)\\ \ddot{x}(t=0) = -2\Omega\cdot\left(gt\cdot\cos a - 0\right)\end{cases}$$ d'où finalement $\boxed{\dot{x}(t) = \left(\Omega g\cos a\right)\cdot t^2}$

Il existe donc une vitesse suivant $\vec{e}_x$. Tout corps tombant en chute libre est, es l'absence de perturbation (vent, …) dévié vers l'Est.

Si on pousse encore plus loin le calcul à l'ordre deux, on peut également voir qu'il existe une déviation plus faible vers le Sud telle que $\ddot{y} = -\left(2\cdot\Omega^2\cdot g\cdot\cos a\cdot\sin a\right)\cdot t^2$

- ***Cas du déplacement horizontal des nuages :***

Plaçons-nous dans l'hémisphère Nord et prenons un nuage qui, poussé par le vent, part un peu au nord de l'Equateur avec une vitesse initiale $\vec{u}_{O/R}$ horizontale dirigée vers la Pôle Nord. Son

poids (qui comprend $\vec{F}_{ie}$) est compensé par la poussée d'Archimède et donc la seule force en plus est $\vec{F}_{ic}$.

$\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m(\vec{w} \wedge \vec{u}_{O/R})$. Sans rentrer dans les détails, il est clair que $\vec{F}_{ic}$ est dirigée vers l'Est : le nuage va être dévié vers l'Est et va ainsi progressivement s'enrouler dans le sens des aiguilles d'une montre. On retrouve ainsi l'animation graphique d'une carte météorologique.
Si l'on se place dans l'hémisphère Sud avec un nuage partant de l'Equateur en direction du Pôle Sud, on va montrer de la même façon qu'il va s'enrouler dans le sens contraire des aiguilles d'une montre ($\vec{F}_{ic}$ vers l'Est aussi) : et c'est ce que là encore, on peut constater sur une carte météorologique.

CHAPITRE 4 :

L'ENERGETIQUE

- ***BUT DU CHAPITRE***
- ***SOMMAIRE DE CE CHAPITRE***

I - INTRODUCTION

Feynman présente la *loi de conservation de l'énergie* de la façon suivante : « [la loi appelée conservation de l'énergie] affirme qu'**il y a une certaine quantité que nous appelons énergie, qui ne change pas dans les multiples modifications que peut subir la nature**. C'est une idée très abstraite, car c'est un principe mathématique; ce principe dit qu'il existe une quantité numérique qui ne change pas, lorsque quelque chose se passe. Ce n'est pas la description d'un mécanisme ou de quoi que ce soit de concret; c'est simplement ce fait étrange que nous puissions calculer un certain nombre et que, lorsque nous avons terminé d'observer l'évolution de la nature et que nous recalculons ce nombre, il soit le même.»

L'énergie mécanique d'un corps soumis à une force conservative ne change pas mais peut prendre l'aspect d'une énergie cinétique ou d'une énergie potentielle et se transformer en l'une ou l'autre.

Energie = du grec *en* (qui veut dire *intérieur*) et *ergon* (qui veut dire *travail*) : étymologiquement l'énergie exprime la capacité emmagasinée dans un objet à faire du travail. De façon plus scientifique, on pourrait dire que la force est l'agent du changement (changement de vitesse par exemple) et l'énergie est la mesure de l'ampleur de ce changement (ce chapitre). « Il est important de réaliser que dans la physique d'aujourd'hui, nous n'avons aucune connaissance de ce que l'énergie est », disait Richard Feynman, Prix Nobel de Physique, 1965. L'énergie peut être perçue assez facilement comme le coût d'un effort qu'il a fallu faire pour déplacer un objet, coût facilement quantifiable en terme d'argent : coût du plein d'essence pour alimenter le moteur de notre voiture ou coût de ce que l'on achète pour manger et nourrir nos muscles….

II - TRAVAIL D'UNE FORCE

2.1. Définition

Une force dont le point d'application se déplace peut mettre en mouvement un corps, modifier sa vitesse, le déplacer ou encore changer sa température, son aspect, etc. Ces constations permettent de définir le travail d'une force. Le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ qui s'exerce sur un point matériel mobile M est le produit scalaire de la force $\vec{F}$ par le déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ du point M:

$$dW = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Lorsque le déplacement se fait d'un point de départ A à un point d'arrivée B, il faut sommer tous les travaux élémentaires dW le long du chemin suivi pour obtenir le travail total :

$$W_{A\to B} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Le travail est donc une intégrale curviligne calculée le long de la trajectoire. Le travail total W est, en règle générale, fonction du chemin suivi et n'est pas une différentielle totale exacte.

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Le travail est donc un scalaire, une grandeur algébrique qui s'exprime en Joule (J)

Rappel : Soit une fonction $f(x,y,z)$ des trois variables d'espace. df est la différentielle totale exacte de la fonction f si :

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right)\cdot dx + \left(\frac{df}{dy}\right)\cdot dy + \left(\frac{df}{dz}\right)\cdot dz$$

Et dans ce cas $\int_A^B df = \Delta f$ se calcule uniquement en fonction des coordonnées des points A et B. Aussi, si dW peut se mettre sous la forme d'une différentielle totale exacte, alors le travail ne dépend alors que du point de départ et du point d'arrivée et n'est plus fonction du chemin suivi.

Exemple : Des livres traînent sur le sol et vous voulez les ranger sur l'étagère: il vous faudra fournir de l'énergie pour les monter jusque là. Un livre bien rangé tombe sur votre tête de cette même étagère : vous avez mal. Ces deux situations ont un point commun: on une masse qui se déplace, dans un cas vers le haut, dans l'autre cas vers le bas, et vous expérimentez alors deux situations : dans le premier cas, vous avez fourni de l'énergie pour monter le livre, dans le second cas, vous avez reçu de l'énergie (celle qui a provoqué la douleur). Si vous avez fourni de l'énergie au livre dans le premier cas, c'est que spontanément, le livre ne peut pas monter tout seul : la force du Poids qu'il subit tend au contraire à le faire aller toujours vers le bas et si il ne descend pas plus bas que le sol c'est tout simplement qu'une force de réaction du plancher l'en empêche (on l'appelle la Réaction). Les molécules des fibres du bois sont suffisamment résistante de part leur liaisons chimiques pour s'opposer à la force du Poids. Donc, pour ranger le livre, vous avez dû déplacer la masse dans un sens opposé à celui que la force Poids impose. Et l'énergie que vous venez de fournir est d'autant plus grande que l'étagère sera haute. Dans l'autre sens, le livre vous fera d'autant plus mal (il vous transmettra plus d'énergie) qu'il tombera de plus haut.

Puisque W dépend du point de départ et d'un point d'arrivée, il apparaît que la grandeur W dépend du référentiel d'observation : dans un train en mouvement, montant une pente, monter son sac de voyage sur l'étagère ne coûte pas beaucoup d'énergie vu de l'intérieur du train (hauteur = 2 mètres) que de l'extérieur (hauteur située à 10 mètre par exemple puisqu'il monte). 2 référentiels : le sol et le train !

2.2. Travail moteur, travail résistant

Le travail est un nombre positif ou négatif qui est le produit de l'intensité d'une force $\vec{F}$ en Newton par un déplacement $\vec{d\ell}$ en mètre.

- Si la force est dans le même sens que le déplacement, le travail est ***moteur*** et le produit scalaire est positif ($W > 0$). La force fournir de l'énergie à l'objet qui reçoit cette énergie (gain).

- Si la force s'oppose au déplacement, le produit scalaire est négatif et le travail est ***résistant***.($W < 0$). La force ôte de l'énergie à l'objet (perte).

- Dans le cas où le déplacement du point $\overrightarrow{d\ell}$ sur lequel s'exerce la force $\vec{F}$ est toujours perpendiculaire à celle-ci, ***le travail est nul***.

C'est le cas par exemple du travail de la force du Poids d'une armoire que l'on fait glisser sur le sol horizontalement. On fournit de l'énergie certes mais il faut fournir une autre force pour faire le déplacement : la force de frottement. Mais on sait bien que pousser une très lourde armoire sur un parquet est tout à fait possible alors que la soulever, déjà plus dur !

C'est aussi le cas de la force de Lorentz : $\vec{F} = q\vec{u} \wedge \vec{B}$ ou celui de la force de Coriolis $\vec{F}_{ie} = -m\left(2\vec{w}_{R/R'} \wedge \vec{u}_{A/R'}\right)$. Dans les deux cas, la force est perpendiculaire au vecteur vitesse donc au déplacement : le produit scalaire est donc nul !

Le travail quantifie le transfert d'énergie à un objet lors de son déplacement sous l'influence des forces.

Sous quelles formes cette énergie transférée va-t-elle se retrouver ? Nous allons voir qu'il existe deux formes : l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

Fin cours 8

2.3. Forces conservatives et non conservatives

Prenons une force dissipative comme la force de frottement: comme la force est toujours opposée au déplacement, on a un travail résistant (W<0), ce qui correspond à un objet qui cède de l'énergie et qui finira par s'arrêter. Il apparaît naturellement que le travail d'une telle force dépend du chemin suivi pour aller d'un point à un autre. Il perdra moins d'énergie en allant en ligne droite entre le point de départ et le point d'arrivée que par tout autre chemin possible.

On peut arriver à la même conclusion ***(que le travail dépend du chemin suivi)*** pour d'autres types de forces que les forces dissipatives. Par exemple les forces qui dépendent du temps soit explicitement (force d'appui du pied sur le sol), soit implicitement (les forces qui dépendent de la vitesse comme la force de Coriolis ou la force de Lorentz). La dépendance en temps fait que naturellement, si pour aller d'un point à un autre on emprunte des chemins différents avec des temps de parcours différents, le travail dépendra du chemin suivi. ***Ces forces sont dites non conservatives***. Il n'existe donc pas une fonction primitive de l'élément différentiel dW . On dit que dW n'est pas une différentielle totale exacte d'où la notation δ (delta minuscule) et non dW. Par conséquent, ne sachant pas si les forces appliquées sont conservatives ou non, nous écrirons par défaut dW .

Pour des forces conservatives, dW est intégrable. Il existe donc une primitive telle que W soit unique. On peut donc écrire dW. C'est par exemple le cas du Poids, de la force de gravitation, de la force électrostatique ou de la force de rappel d'un ressort.

Les forces qui dépendent du chemin suivi sont dites Forces non conservatives. Les forces conservatives sont donc des forces qui ne dépendent pas du chemin suivi.

2.4. Exemple de calcul de travail : le travail du poids

Soit un point matériel mobile M de masse m se déplaçant d'un point A à un point B et soumis à la seule force de pesanteur $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$.

$$dW_{\vec{P}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dOM} = -mg\vec{e_z} \cdot \left(dx \cdot \vec{e_x} + dy \cdot \vec{e_y} + dz \cdot \vec{e_z}\right) = -mg \cdot dz$$

Dans ce cas, le travail élémentaire est une différentielle totale exacte: $dW = dW$. Le travail du poids ne dépend donc que de l'altitude z des points de départ et d'arrivée

$$W_{\vec{P}} = \int_A^B -mg \cdot dz = -mg \cdot \left(z_B - z_A\right)$$

Les forces telles que le poids dont le travail ne dépend pas du chemin suivi sont dites conservatives.

2.5. Exemple de calcul de travail : le travail de la force de gravitation

Soit un point matériel mobile M de masse m se déplaçant d'un point A à un point B dans le voisinage d'une masse M située au centre du repère lié au référentiel $\Re$. Il est soumis à la force de gravitation : $\vec{F} = -G \cdot \frac{mM}{r^2} \cdot \vec{e_r}$. Le travail a alors pour expression :

$$W_{\vec{F}} = \int_A^B -G \cdot \frac{mM}{r^2} \cdot dr = G \cdot mM \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

2.6. Exemple de calcul de travail : le travail de la réaction d'un support

La réaction d'un support $\vec{R}$ peut être considérée comme la somme d'une composante normale $\overrightarrow{R_N}$ et d'une composante tangentielle $\overrightarrow{R_T}$: $\vec{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$. Quand un corps se déplace sur le support suivant une trajectoire connue, la réaction tangentielle est toujours opposée à la vitesse du point M: $\overrightarrow{R_T} = -f \cdot \overrightarrow{e_T}$ dans le cas d'un frottement solide (f est le coefficient de frottement) ou $\overrightarrow{R_T} = -au \cdot \overrightarrow{e_T}$ dans le cas d'un frottement visqueux.

Le travail a alors pour expression :

$$W_{\vec{R}} = \int_C \vec{R} \cdot ds \cdot \overrightarrow{e_T} = \int_C -R_T \cdot ds$$

si s désigne l'abscisse curviligne du point M sur la trajectoire C. Dans le cas d'un frottement solide, le travail dépend du chemin suivi et plus précisément de sa longueur totale du chemin parcouru :

$$W_{\vec{R}} = -f \cdot \ell$$

III - ENERGIE POTENTIELLE

3.1. Relation entre travail d'une force conservative et énergie potentielle

Dans le cas où le travail d'une force est une différentielle totale exacte, on dit que la force est conservative. Son travail peut donc s'écrire :

$$W_{A\to B} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

$W_{A\to B}$ ne dépend que des caractéristiques des positions initiale A et finale B du point mobile M soumis à la force conservative $\vec{F}$. Dans ce cas, on peut donc écrire $W_{A\to B}$ sous la forme d'une différence de deux valeurs appelées ***énergies potentielles*** :

$$W_{A\to B} = -\left(E_P^B - E_P^A\right) = -\Delta E_p$$

Le signe - signifie que l'on considère que l'énergie potentielle du point matériel doit diminuer quand le travail de la force qui s'exerce sur ce point est moteur : $\Delta E_p = -W_{A\to B}$ ou encore $dE_p = -\delta W_{A\to B}^{Conservatives}$.

L'énergie potentielle est ainsi définie à une constante près qui dépendra des choix arbitraires que l'on fait pour fixer l'origine des énergies potentielles dans telle ou telle situation. On prendra si possible une origine ou celles-ci sont nulles. Il est à noter que ce qui comptera par la suite sont les variations de cette énergie. La constante ne jouera donc aucun rôle.

Dans ces conditions, l'énergie potentielle en un point matériel M sera la somme de toutes les énergies potentielles correspondant à toutes les forces conservatives qui agissent sur lui.

3.2 Relation entre force conservative et énergie potentielle

$$dW = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$$

et :

$$-dE_p = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)\cdot dx + \left(-\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)\cdot dy + \left(-\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)\cdot dz$$

Pour une force conservative : $dE_p = -dW$. On en déduit :

$$\vec{F} =_{B_{Ca}} \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \vec{F} = -\overrightarrow{grad}\ E_p$$

Une force conservative dérive (par rapport aux variables d'espace) d'une énergie potentielle.

3.3. Exemple : Energie potentielle de pesanteur

La force de pesanteur (poids) n'a qu'une composante *-mg* selon l'axe *Oz* : $\vec{P} = -mg \cdot \vec{e_z}$. L'énergie potentielle de pesanteur ne dépend que de l'altitude *z* et :

$$-mg = -\frac{dE_p}{dz}$$

En intégrant : $E_p = mgz + Cste$. L'énergie potentielle est toujours définie à une constante près. On choisit généralement une origine des énergies potentielles telle que $E_p=0$ pour *z=0*. Dans ces conditions l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit :

$$E_p = mgz$$

3.4. Exemple : Energie potentielle de gravitation

Le travail de la force de gravitation s'exerçant sur une masse *m* par une masse *M* s'écrit en fonction de la distance *r* séparant les masses:

$$W_{\vec{F}} = G \cdot mM \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = -\Delta E_p$$

En choisissant une énergie potentielle nulle quand l'interaction de gravition tend vers zéro, c'est à dire à l'infini, il vient :

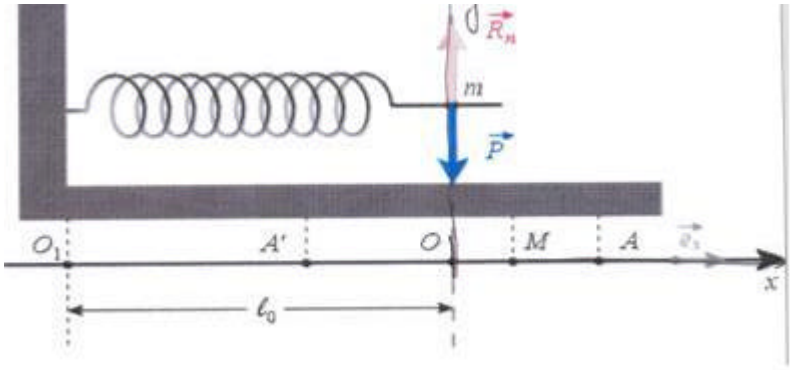
$$E_p = -G \cdot \frac{mM}{r}$$

3.5. Exemple : Energie potentielle élastique

La force de rappel élastique exercée par un ressort d'axe *Ox* est : $\vec{F} = -k \cdot (\ell - \ell_0) \cdot \vec{e_x}$. ***k*** est la constante de raideur du ressort, ℓ sa longueur et ℓ_0 sa longueur au repos (ou à vide). On pose $x = (\ell - \ell_0)$ l'allongement du ressort. On a donc :

$$\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{e_x}$$

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = F \cdot d\ell \cdot \vec{ex} = -k \cdot x \cdot dx \cdot \vec{e_x} = -dE_p$$



En intégrant sur la variable x, il advient :

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + Cste$$

On choisit généralement une origine de l'énergie potentielle telle que $E_p = 0$ pour $x = 0$. Dans ces conditions l'énergie potentielle élastique s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

IV - ENERGIE CINETIQUE

4.1. Théorème de l'énergie cinétique

Soit un point matériel mobile *M* soumis à plusieurs forces. La deuxième loi de Newton lie la somme des forces (conservatives et non conservatives) qui s'exercent sur le point matériel et l'accélération de ce point dans le préférentiel :

$$\sum \vec{F}_{(M/R)} = m \cdot \vec{a}(M/R)$$

La somme des travaux des forces qui s'exercent sur *M* est :

$$\sum W_{\vec{F}} = \sum \int_A^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_A^B \sum \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = m \int_A^B \vec{a}(M/R) \cdot d\overrightarrow{OM}$$

et donc :

$$\sum W_{\vec{F}} = m \int_A^B \frac{\overrightarrow{du_{(M/R)}}}{dt} \cdot d\overrightarrow{OM} = m \int_A^B \overrightarrow{du_{(M/R)}} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = m \int_A^B \overrightarrow{du_{(M/R)}} \cdot \overrightarrow{u_{(M/R)}} = \left[\frac{1}{2} m \vec{u}^2_{(M/R)} \right]_A^B$$

Soit :

$$\sum W_{\vec{F}} = \frac{1}{2} m \vec{u}^2_{(B/R)} - \frac{1}{2} m \vec{u}^2_{(A/R)} = \frac{1}{2} m \vec{u}^2_{fin} - \frac{1}{2} m \vec{u}^2_{debut}$$

On constate que le travail peut se mettre sous la forme d'une différence de deux grandeurs qui dépendent de la vitesse du point *M* à deux instants différents. Ces grandeurs s'appellent l'énergie cinétique qui a donc pour expression :

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot u^2_{(M/R)}$$

Nous venons donc de faire apparaître une nouvelle forme d'énergie E_c, ou c désigne l'initiale anglaise k (pour kinetik, nommée ainsi pour la première fois par Lord Kelvin en 1849). Comme la quantité de vitesse est une quantité qui dépend du référentiel, l'énergie cinétique est encore une quantité relative. Cette énergie E_c a par convention une constante nulle : pas de vitesse donc pas d'énergie cinétique.

La variation de l'énergie cinétique est donnée par le théorème de l'énergie cinétique ; Au lieu de s'intéresser à la variation de l'énergie cinétique entre deux instants discrets, on s'intéresse à celle-ci entre deux instants infiniment proches, séparés de dt, ou entre deux points infiniment proches du chemin séparés de dl :

$$dW_{\sum \vec{F}} = \sum \vec{F}.d\vec{l} = m\vec{a}.d\vec{l} = m\frac{d\vec{u}}{dt}.d\vec{l} = md\vec{v}.\vec{v} = d(\frac{1}{2}m\vec{v}^2) = d(\frac{1}{2}mv^2) = dE_c$$

La différentielle de l'énergie cinétique est égale au travail élémentaire de toutes les forces : $dE_c = dW_{\vec{F}}^{conservatives} + dW_{\vec{F}}^{non_conservatives} = dW_{\sum \vec{F}}$

Que l'on peut également écrire sous la forme suivante après intégration :

$$\Delta E_c = \sum W_{\vec{F}} \quad \text{avec} \quad \sum W_{\vec{F}} = \sum W_{\vec{F}}^{conservatives} + \sum W_{\vec{F}}^{non_conservatives}$$

$\sum W_{\vec{F}}$ est la somme des travaux des forces conservatives et non conservatives : $\sum W_{\vec{F}} = \sum W_{\vec{F}}^{conservatives} + \sum W_{\vec{F}}^{non_conservatives}$.

4.2. Puissance instantanée

La ***puissance moyenne*** est le travail mis en jeu par unité de temps, c'est-à-dire par seconde. Elle s'exprime donc en Joules.seconde^{-1}, que l'on appelle le **Watt (W)**. En 1783, James Watt mesura qu'un cheval exerce une force de 660N pour avancer à 4 kmh^{-1}, ce qui représente 736 Watt et il appela cette quantité puissance 1 cheval-vapeur, cv ou horse hp en anglais. Une personne normale en activité consomme typiquement 75 Watt.

Entre deux instants séparés de Δt, la puissance moyenne sera donc le rapport $P_{moy}=W/\Delta t$.

Pour les mêmes raisons que pour le travail, la puissance peut être :

- positive : F et v sont dans le même sens, on parlera de puissance motrice
- négative :F et v sont dans des sens opposés, on parlera de puissance résistante.

La ***puissance instantanée*** $p_{\vec{F}}$ d'une force est la dérivée par rapport au temps du travail soit le produit scalaire de la force $\vec{F}$ par la vitesse $\vec{u}_{(M/R)}$ du point matériel mobile *M* sur lequel s'exerce cette force.

$$P_{\vec{F}} = \frac{dW_{\sum \vec{F}}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}_{(M/R)}$$

Le théorème de l'énergie cinétique peut se formuler en fonction de la somme des puissances des différentes forces conservatives et non conservatives qui s'exercent sur le point *M* :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum p_{\vec{F}_C} + \sum p_{\vec{F}_{NC}} = \sum p_{\sum \vec{F}}$$

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la puissance instantanée de toutes les forces : $\frac{dE_c}{dt} = \sum p_{\overrightarrow{\sum F}}$.

V - ENERGIE MECANIQUE

Nous avons vu qu'il existait deux types d'énergie : l'énergie effective (qui dépend de la vitesse = énergie cinétique) et l'énergie potentiellement récupérable (énergie potentielle).

5.1. Energie mécanique d'un point matériel soumis à une force conservative

Par définition de la variation d'énergie potentielle d'un point matériel *M* soumis à une force conservative est égale à l'opposé du travail de cette force au cours du déplacement du point *M*: $\Delta E_p = -W_{\overrightarrow{F_C}}$. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, on obtient : $\Delta E_p = -W_{\overrightarrow{F_C}} = -\Delta E_c$, soit entre deux instants *initial* et *final* :

$$E_p^{finale} + E_c^{finale} = E_p^{initiale} + E_c^{initiale} = Cste \quad \text{ou encore} \quad \Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

L'énergie mécanique est définie par la somme des énergies cinétiques et potentielles.

Il existe une grandeur appelée énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ qui demeure constante pour un corps soumis à une force dérivant d'une énergie potentielle. L'énergie mécanique se conservant, une force qui dérive d'une énergie potentielle est dite conservative.

En présence de forces uniquement conservatives, l'équation différentielle $\frac{dE_m}{dt}$ ***est l'intégrale première du mouvement.***

Fin cours 9

5.2. Théorème de l'énergie mécanique

Soit un corps ponctuel soumis à plusieurs forces conservatives et non conservatives. On note $\sum \overrightarrow{F_C}$ la somme des forces conservatives et $\sum \overrightarrow{F_{NC}}$ la somme des forces non conservatives. Une énergie potentielle est définie pour chaque force conservative. La somme des travaux des forces conservatives sera égale à l'opposé de la somme des variations des énergies potentielles :

$$\sum W_{\overrightarrow{F_C}} = \sum \int_A^B \overrightarrow{F_C} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\sum \Delta E_p$$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique :

$$W = \sum W_{\overrightarrow{F_C}} + \sum W_{\overrightarrow{F_{NC}}} = \Delta E_c \quad \text{or} \quad \sum W \overrightarrow{F_C} = -\sum \Delta E_p$$

soit :

$$-\sum \Delta E_p + \sum W_{\overrightarrow{F_{NC}}} = \Delta E_c \quad \text{donc :} \quad \Delta E_c + \sum \Delta E_p = \sum W_{\overrightarrow{F_{NC}}}$$

La variation d'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ ***entre deux instants du mouvement est égale au travail des forces non conservatives :*** $\Delta E_m = \Delta E_c + \sum \Delta E_p = \sum W_{\overline{F_{NC}}}$

Fin cours 9

Le théorème de l'énergie mécanique peut se formuler différemment. La différentielle de l'énergie mécanique est égale au travail élémentaire des forces non conservatives et sa dérivée par rapport au temps est égale à la somme des puissances instantanées des forces non conservatives :

$$dE_m = \sum dW_{\overline{F_{NC}}} \qquad \text{ce qui donne} \qquad \frac{dE_m}{dt} = \sum p_{\overline{F_{NC}}}$$

5.3. Exemple d'application du théorème de l'énergie mécanique : le pendule simple.

Soit un pendule simple constitué d'un fil *OA* de longueur ℓ sans masse, à l'extrémité duquel est suspendue une masse ponctuelle *m*. *O* est l'extrémité fixe du fil. On note $j = (Ox, OA)$ la position angulaire du pendule. *Ox* est verticalement dirigé vers le bas, *Oy* est horizontalement dirigé vers la droite. On a $\overrightarrow{OA} = \ell \cdot \overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{u_{(A/R)}} = \ell \cdot \dot{j} \cdot \overrightarrow{e_j}$.

L'énergie potentielle de pesanteur $E_p = -mgx + cste$ est choisie nulle pour $j = 0$:

$$E_p = mg\ell \cdot (1 - \cos\varphi) \qquad \text{car} \qquad \Delta E_p = -W = -\int \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot u_{(A/R)}^2 = \frac{1}{2} m \cdot (\ell \cdot \dot{j})^2$$

L'énergie mécanique a pour expression :

$$E_m = mg\ell \cdot (1 - \cos j) + \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{j}^2 = E_p + E_c$$

L'intégrale première du mouvement s'obtient en dérivant cette expression par rapport au temps :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = mg\ell \dot{j} \sin j + m\ell^2 \dot{j} \ddot{j} = \sum p_{\vec{F}_{NC}}$$

soit :

$$\frac{dE_m}{dt} = m\ell \dot{j} \cdot (g \sin j + \ell \ddot{j})$$

En l'absence de force de frottement, les forces exercées sur le point matériel sont la tension du fil $\vec{T}$ et le poids $\vec{P}$. Le poids est une force conservative. $\vec{T}$ est normale à la trajectoire, sa puissance est donc nulle ($\vec{T} \cdot \vec{u}_{(A/R)} = 0$).

On peut donc obtenir l'équation différentielle du mouvement du pendule :

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum p_{\overline{F}_{NC}} = 0 = m\ell\dot{j}\cdot\left(g\sin j + \ell\ddot{j}\right) \quad \text{soit} \quad \ddot{j} + \frac{g}{\ell}\sin j = 0$$

5.4. Stabilité d'un système, position d'équilibre

Un système est en équilibre quand sa vitesse est nulle : $\vec{u}_{(M/R)} = \vec{0}$ **.**

Les positions d'équilibre sont alors déterminées par la valeur de l'énergie potentielle. En effet si l'énergie mécanique est constante, la position d'équilibre est obtenue pour les valeurs de la position du point mobile pour lesquelles, l'énergie potentielle est elle aussi constante. Si on note q la variable de position et q_e la position d'équilibre, alors :

Equilibre	***Equilibre stable :***	***Equilibre instable :***
$\left(\frac{dE_p}{dq}\right)_{q_e} = 0$	$\left(\frac{d^2E_p}{dq^2}\right)_{q_e} > 0$	$\left(\frac{d^2E_p}{dq^2}\right)_{q_e} < 0$

Exemple : gouttière parabolique

$$E_p = mgz = mgax^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dE_p}{dq}\right) = 2mgax \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d^2E_p}{dq^2}\right) = 2mga$$

La position x_e=0 est une position d'équilibre et cette position est stable.

Exemple : pendule simple

$$E_p = mg\ell(1-\cos j) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dE_p}{dq}\right) = mg\ell\sin j \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d^2E_p}{dq^2}\right) = mg\ell\cos j$$

La position φ_e=0 est une position d'équilibre et cette position est stable alors que la position φ_e=π est une position d'équilibre mais instable

CHAPITRE 5 :

L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

A UN DEGRE DE LIBERTE

- ***BUT DU CHAPITRE***

- donner une idée de l'importance exceptionnelle de ce mouvement périodique ;
- montrer que le système masse-ressort, le pendule simple, le circuit LC se comportent comme des oscillateurs harmoniques dans certaines limites ;
- établir que la fréquence du mouvement est indépendante de l'amplitude de l'oscillation, et préciser le mouvement et son aspect ;
- étudier l'influence d'un amortissement (toujours présent dans la nature) sur le mouvement et l'énergie mécanique ;
- chercher la « réponse » de l'oscillateur à une « sollicitation » sinusoïdale. Mettre en évidence le phénomène très important de résonance. Définir l'impédance en mécanique et électricité, avec exemples à l'appui.

- ***SOMMAIRE DE CE CHAPITRE***

I – OSCILLATEUR NON AMORTI.

1.1. Définition

La variable caractéristique du système physique étudié est notée d'une façon générale q lorsque le type du système (mécanique, électrique…) n'est pas précisé.

Suivant le type de système, q représente la position d'un point matériel, une intensité, ou une tension électrique, la charge portée par un condensateur, un moment dipolaire, une densité moyenne d'électrons dans un plasma…

$$q \Rightarrow x, y, z, q, i, u, q, j$$

Lorsque le type du système est défini, la notation correspondante de q est utilisée. La fonction q(t) décrit alors l'évolution du système au cours du temps. Les dérivées première et seconde par rapport au temps sont notées respectivement :

$$\frac{dq(t)}{dt} = q'(t) = \dot{q} \quad et \quad \frac{d^2q(t)}{dt^2} = q''(t) = \ddot{q}$$

Considérons un système physique à un degré de liberté dont les oscillations au cours du temps sont décrites par la variable dynamique q(t), le système constitue ***un oscillateur harmonique*** si q(t) satisfait l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2q(t)}{dt^2} + w_o^2 q(t) = 0 \quad ou \quad q''(t) + w_o^2 q(t) = 0 \quad ou \quad \ddot{q} + w_o^2 q = 0}$$

w_o est une constante positive appelée pulsation propre, caractéristique de l'oscillateur. Elle s'exprime en rad.s^{-1}.

La solution q(t) de l'équation différentielle (ou ***réponse*** de l'oscillateur) décrit les oscillations libres du système. Q s'exprime en unité SI de la grandeur physique concernée.

1.2. Solution mathématique : réponse q(t)

L'équation $\ddot{q} + w_o^2 q = 0$ est une équation du second ordre sans second membre. Les solutions recherchées sont du type :

$$\boxed{q(t) = A \cdot \exp(r \cdot t)}$$

Après dérivation de l'expression précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} q(t) &= A \cdot \exp(r \cdot t) \\ \dot{q} &= A \cdot r \cdot \exp(r \cdot t) \\ \ddot{q} &= A \cdot r^2 \cdot \exp(r \cdot t) \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \boxed{r^2 + w_o^2 = 0}$$

Le calcul du discriminant est négatif donc les deux racines de l'équation sont imaginaires telles que $r = \pm jw_o$. La solution peut donc s'écrire sous la forme :

$$\boxed{q(t) = A \cdot \exp(jw_o t) + B \cdot \exp(-jw_o t)}$$

Rappels mathématiques :

$$\begin{aligned} 2 \cdot \cos(w_o t) &= \exp(jw_o t) + \exp(-jw_o t) \\ 2j \cdot \sin(w_o t) &= \exp(jw_o t) - \exp(-jw_o t) \end{aligned} \quad \text{donc} \quad \begin{aligned} \exp(jw_o t) &= \cos(w_o t) + j \cdot \sin(w_o t) \\ \exp(-jw_o t) &= \cos(w_o t) - j \cdot \sin(w_o t) \end{aligned}$$

La solution q(t) peut finalement s'écrire :

$$q(t) = (A+B) \cdot \cos(w_o \cdot t) + j \cdot (A-B) \cdot \sin(w_o \cdot t)$$

Que l'on peut écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} q(t) &= C \cdot \cos(w_o t) + jD \cdot \sin(w_o t) \\ q(t) &= q_{\max} \cdot \cos(w_o t + j) \\ q(t) &= q_{\max} \cdot \sin(w_o t + y) \end{aligned}}$$

Où q_{max} représente l'*amplitude*

j représente la *phase initiale* de la loi q(t) de période $T_0 = \dfrac{2p}{w_0}$

La réponse q(t) est harmonique. On retrouve la définition de l'oscillateur harmonique donné dans l'introduction. La solution de l'équation étant trouvée, il reste à déterminer les deux constantes (C,D ou q_{max},φ ou q_{max},ψ). Dans un problème physique, ces dernières sont déterminées par deux relations qui décrivent l'état initial du système : on les appelle ***conditions initiales***. Elles s'écrivent à t = 0 :

$$\boxed{q(t=0) = q_0 \quad et \quad q'(t=0) = \dot{q_0} = \dot{q}_0}$$

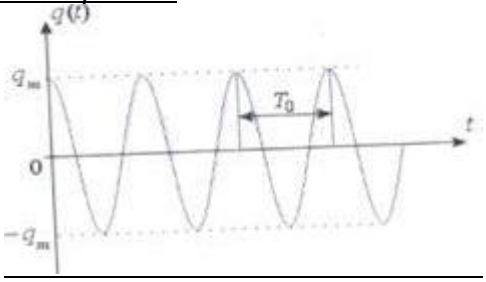
La réponse q(t) est alors unique.

Ces conditions initiales sont généralement choisies telles que : $\begin{aligned} q(t=0) &= q_0 > 0 \\ q'(t=0) &= \dot{q_0} = \dot{q}_0 = 0 \end{aligned}$

On montre alors que $q_{max}=q_0$ et φ = 0 ce qui donne finalement : $\boxed{q(t) = q_0 \cdot \cos(w_0 t)}$

Fin cours 10

Représentation temporelle de la réponse :



1.3. Etude énergétique : Energie mécanique, cinétique et potentielle.

Prenons le cas précédent d'une masse m accrochée à un ressort de ***raideur k*** et de ***longueur à vide*** ℓ_0**.** En l'absence de forces de frottement, le système n'est soumis qu'à des *forces conservatives.* On peut par conséquent écrire le théorème de l'énergie mécanique tel que :

$$\boxed{\frac{dE_m(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_m(t) = E_p(t) + E_c(t) = C^{ste}}$$

Il suffit donc d'écrire les énergies cinétique et potentielle, d'en faire la somme et d'en faire la dérivée pour en déduire l'énergie mécanique. L'énergie mécanique étant constante, on peut d'ores et déjà constater qu'une augmentation de l'énergie cinétique se traduira par une diminution de l'énergie potentielle et vice et versa.

$$E_c(t) = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$E_p(t) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\int (-k \cdot x) \cdot dx = k \cdot \frac{x^2}{2}$$

soit $\quad \frac{dE_m(t)}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$

Ce qui nous donne l'équation :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \quad ou \quad \ddot{x} + w_0^2 \cdot x = 0 \qquad avec\ w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad et \quad T_0 = 2p\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

avec pour solution : $\boxed{x_{\max} = x_0 \quad et \quad j = 0 \qquad x(t) = x_0 \cdot \cos(w_0 t)}$

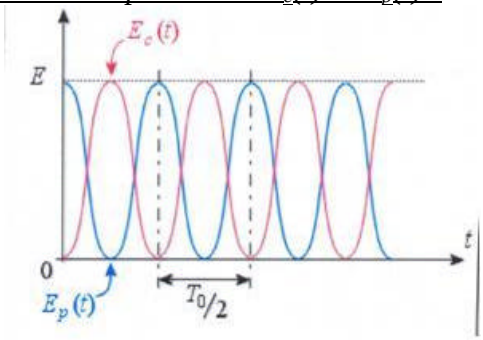
On peut donc décrire les énergies potentielle et cinétique dans le temps et en déduire l'énergie mécanique :

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m \cdot x_0^2 \cdot w_0^2 \cdot \sin^2(w_0 t)$$

$$E_p(t) = k \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}k \cdot x_0^2 \cdot \cos^2(w_0 t) = \frac{1}{2}m \cdot w_0^2 \cdot x_0^2 \cdot \cos^2(w_0 t)$$

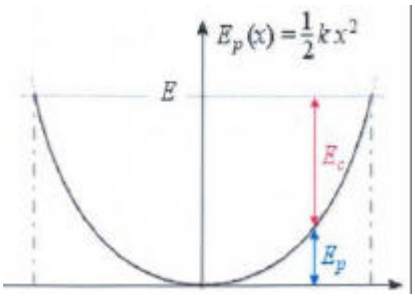
$$E_m(t) = \frac{1}{2}k \cdot x_0^2$$

Variation temporelle de $E_c(t)$ et $E_p(t)$:



Les énergies cinétique et potentielle varient en fonction du temps. Leur somme reste constante et égale à l'énergie mécanique. Il y a, à tout instant, transformation d'énergie d'un type à l'autre. $E_c(t)$ et $E_p(t)$ sont des fonctions sinusoïdales de période $T_0/2$ et de valeur moyenne E/2

Variation spatiale de $E_p(x)$:



E_c et E_p définies par les expressions précédentes ont des valeurs positives ou nulles. L'énergie mécanique est fixée par la valeur E déterminée par les conditions initiales. Le graphe montre que les oscillations de m sont limitées dans un domaine précis : $-x_m \leq x \leq x_m$

1.4. Exemple d'un oscillateur mécanique : masse – ressort horizontal

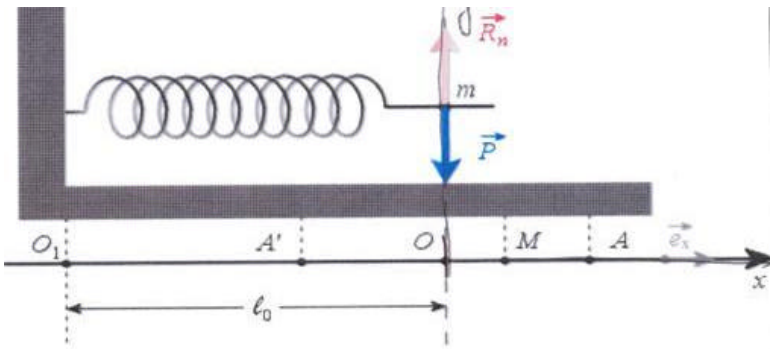
Le ressort est caractérisé par sa ***raideur k*** et par sa ***longueur à vide*** ℓ_0 (sans déformation, sans étirement). Son extrémité O_1 est fixe, la masse m est accrochée à l'extrémité de O. La masse du ressort est négligeable et son élasticité supposée parfaite.

Elasticité parfaite : $k = c^{ste}$

Les positions sont repérées sur l'axe $(O, \vec{e}_x)$ comme indiqué sur la figure, le référentiel est galiléen.

**** A L'EQUILIBRE :***

A l'équilibre, le ressort ne bouge pas, sa longueur est sa longueur à vide ℓ_0. Sa masse est immobile en position O, appelée ***position d'équilibre***.



Longueur du ressort à l'équilibre : $l_e = \overline{O_1O} = l_0$

La force de pesanteur $\vec{P}$ et la réaction normale $\vec{R}_n$ s'équilibrent : $\vec{P} + \vec{R}_n = \vec{0}$

**** MISE EN MOUVEMENT :***

Pour mettre en mouvement le ressort, on écarte la masse du point O au point A, soit d'une distance $\overline{OA} = x_0$. Puis on lâche le ressort :

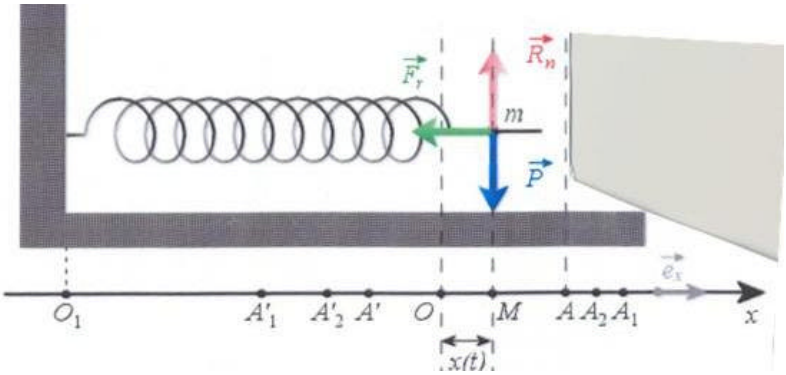
- soit sans vitesse initiale : $x'(t=0) = \dot{x}_0 = 0$
- soit avec une vitesse initiale, positive ou négative : $x'(t=0) = \dot{x}_0$

On définit ainsi les conditions initiales du système.

**** EN MOUVEMENT :***

Le ressort et la masse m sont maintenant en mouvement dont l'équation est déterminée à partir des forces qui s'appliquent sur le système. La position x(t) de la masse m à tout instant t est donnée par :

$$\boxed{x(t) = \left(\ell - \ell_{eq}\right) = \left(\ell - \ell_0\right)}$$



En appliquant le bilan des forces et la relation fondamentale de la dynamique, on obtient :

$$\vec{F}_{ressort} = -k \cdot \left(\ell - \ell_0\right)\vec{e}_x = -k \cdot x \cdot \vec{e}_x$$
$$\vec{P} = -mg \cdot \vec{e}_y$$
$$\vec{R}_n = R_n \cdot \vec{e}_y$$

Ce qui nous donne suivant l'axe des x :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \quad ou \quad \ddot{x} + w_0^2 \cdot x = 0}$$
$$\boxed{avec\, w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad et \quad T_0 = 2p\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

La solution de l'équation se met sous la forme :

$$\boxed{x(t) = x_{\max} \cdot \cos(w_0 t + j)}$$

Recherche de la réponse x(t) avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\max} \cdot \cos(w_0 t + j) \\ \dot{x} &= -x_{\max} \cdot (w_0) \cdot \sin(w_0 t + j) \end{aligned} \quad \text{donc} \quad \begin{aligned} x(t=0) &= OA = x_0 = x_{\max} \cdot \cos(j) \\ \dot{x}(t=0) &= 0 = -x_{\max} \cdot (w_0) \cdot \sin(j) \end{aligned}$$

$$\text{Soit} \quad \boxed{\begin{array}{c} x_{\max} = x_0 \quad et \quad j = 0 \\ x(t) = x_0 \cdot \cos(w_0 t) \end{array}}$$

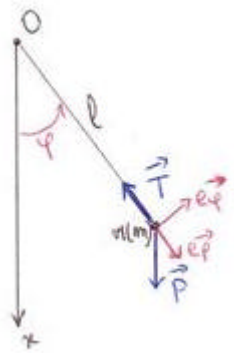
Bilan pour le système masse-ressort :

w_0	T	Solution	Energie Totale
$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$2p \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$	$x = x_0 \cdot \cos(w_0 \cdot t + j)$	$\frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + w_0^2 x_0^{\,2}\right) = \frac{1}{2} k x_0^2$

1.5. Exemple du pendule simple (fil de longueur constante et de masse m).

Plusieurs méthodes conduisent à l'équation de l'oscillateur : relation fondamentale de la dynamique, théorème du moment cinétique, théorème de l'énergie cinétique, théorème de l'énergie mécanique.

<u>En appliquant la RFD au système :</u>



$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}(M/R) \text{ avec } \vec{OM} = \ell \vec{e}_r \rightarrow \vec{u}(M/R) = \ell j\, \vec{e}_j$$

$$\vec{a}(M/R) = \ell \ddot{j}\, \vec{e}_j - \ell \dot{j}^{\,2} \vec{e}_r$$

$$\vec{T} = \left\|\vec{T}\right\| \cdot \vec{e}_r \quad avec \quad \left\|\vec{T}\right\| > 0 \quad \text{et} \quad \vec{P} = \left\|\vec{P}\right\| (\cos j\, \vec{e}_j - \sin j\, \vec{e}_j)$$

$$\text{Donc} \begin{cases} P \cdot \cos j - T = -m\ell \dot{j}^{\,2} & suivant\ \vec{e}_r \\ -P \cdot \sin j = m\ell \ddot{j} & suivant\ \vec{e}_j \end{cases}$$

D'où l'équation du mouvement : $\boxed{\ddot{j} + \frac{g}{\ell} \sin j = 0}$

<u>En appliquant la TMC au point O fixe :</u>

$$\vec{M}_O(\vec{T}/R) = \vec{0} = \vec{OM} \times \vec{T} \quad \text{et} \quad \vec{M}_O(\vec{P}/R) = \vec{OM} \times \vec{P}$$

$$\vec{M}_O(\vec{P}/R) = \vec{OM} \times \vec{P} = \ell \vec{e}_r \times P(\cos j\, \vec{e}_j - \sin j\, \vec{e}_j) = -\ell P \sin j\, \vec{e}_z$$

$$\vec{L}_O(M/R) = \vec{OM} \times m\vec{u}(M/R) = \ell \vec{e}_r \times m\ell j\, \vec{e}_j = m\ell^2 \dot{j}\, \vec{e}_z$$

Donc en appliquant le théorème du moment cinétique, c'est-à-dire en effectuant la dérivée, nous avons :

$$\left[\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\left(m\ell^2 \dot{j}\, \vec{e}_z\right)\right]_R = m\ell^2 \ddot{j}\, \vec{e}_z \quad car\ \vec{e}_z\ fixe\ dans\ R.$$

$$\text{Soit } \left[\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt}\right]_R = \sum M(\vec{F}/R) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{j} + \frac{g}{m}\sin j = 0}$$

En considérant l'approximation des petits angles (petites oscillations), nous pouvons dire par un développement limité autour de la position 0 que sin φ ~ φ. L'équation du mouvement peut alors s'écrire :

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{m}\varphi = 0}$$

On est donc en présence d'une équation différentielle du second ordre sans second membre, de type oscillateur harmonique que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\boxed{\ddot{j} + w_0^2 \cdot j = 0 \quad avec\, w_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad et \quad T_0 = 2p\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

Bilan pour le pendule :

w_0	T	Solution	Energie Totale
$\sqrt{\frac{g}{\ell}}$	$2p \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$	$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi)$	$\frac{1}{2}m\left(\dot{\varphi}^2 + \omega_0^2\varphi^2\right) = \frac{1}{2}mg\ell\varphi_0^2$

1.6. Exemple du circuit oscillant LC.

Soit un circuit à courant variable constitué par un condensateur de capacité C et une inductance L (self) montés en série. Les conventions de signe (cf figure) sont telles que l'on ait :

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$$

L'inductance L est le siège d'un phénomène d'auto-induction avec apparition d'une f.e.m qui tend à s'opposer au courant I. On a donc :

$$U_{AC} = 0 = U_{AB} + U_{BC} = (V_B - V_A) + (V_C - V_B)$$

Et en utilisant la convention récepteur, nous avons donc :

$$U_{AC} = (V_B - V_A) = \frac{q}{c};$$

$$U_{BC} = (V_C - V_B) = L \cdot \frac{dI}{dt};$$

D'où en remplaçant dans la première équation, nous obtenons :

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0}$$

Bilan pour le circuit LC :

w_0	T	Solution	Energie Totale
$\sqrt{\frac{1}{LC}}$	$2p \cdot \sqrt{LC}$	$q = q_0 \cdot \cos(w_0 \cdot t + j)$	$\frac{1}{2}L(\dot{q}^2 + w_0^2 q^2) = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}$

Fin cours 11

II – OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI PAR FROTTEMENT FLUIDE.

Nous nous intéressons maintenant à des systèmes physiques à un degré de liberté, soumis à une force de frottement fluide $\vec{F}_f = -a \cdot \vec{u}$ (responsable de l'amortissement), en régime libre, évoluant dans un référentiel galiléen.

2.1. Equation caractéristique

On reprend la configuration précédente en y ajoutant un frottement visqueux (le plus courant) sous la forme d'une force $\vec{F}_f = -a\dot{x}$. L'équation différentielle du mouvement (origine prise au niveau de la position d'équilibre) est donc :

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

- qui peut s'écrire sous la forme normalisée :

$$\ddot{x} + 2l\dot{x} + w_0^2 x = 0$$

Avec $w_0^2 = \frac{k}{m}$ la pulsation propre (rad.s^{-1}) et $l = z \cdot w_0 = \frac{a}{2m}$ avec z le coefficient d'amortissement de l'oscillateur (sans unité).

- ou encore

$$\ddot{x} + \frac{w_0}{Q}\dot{x} + w_0^2 x = 0$$

Avec $Q = \frac{m \cdot w_0}{a}$ le facteur de qualité (sans unité).

Bilan pour le pendule simple ou le circuit oscillant :

Type oscillateur	w_0	Equation	l
Pendule simple	$\sqrt{\frac{g}{\ell}}$	$m\ell\ddot{q} + a\ell\dot{q} + mgq = 0$	$\frac{a}{2m}$
Circuit RLC	$\sqrt{\frac{1}{LC}}$	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$	$\frac{R}{2L}$

2.2. Solutions de l'équation différentielle

L'équation $\ddot{x}+\frac{w_0}{Q}\dot{x}+w_0^2 x=0$ est une équation du second ordre sans second membre. Les solutions recherchées sont du type :

$$\boxed{x(t)=A\cdot\exp(r\cdot t)}$$

Après dérivation de l'expression précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x(t)&=A\cdot\exp(r\cdot t)\\ \dot{x}&=A\cdot r\cdot\exp(r\cdot t)\\ \ddot{x}&=A\cdot r^2\cdot\exp(r\cdot t)\end{aligned} \quad \text{soit} \quad r^2+\frac{a}{m}r+\frac{k}{m}=0$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$\boxed{r^2+\frac{w_0}{Q}r+w_0^2=0}$$

Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta=\frac{w_0^2}{Q^2}-4w_0^2=w_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)$$

La solution finale dépend donc di signe du discriminant D.

2.3. Régime pseudo-périodique

Si *D* ***est négatif*** *(c'est-à-dire si Q > ½, z < 1, amortissement faible),* ***la solution est dite pseudo-périodique.*** Les deux solutions de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées :

$$r=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm j\frac{\omega_0}{2}\sqrt{4-\frac{1}{Q^2}}=-\zeta\pm j\omega_a$$

La solution x(t) peut donc s'écrire sous la forme :

$$\boxed{x(t)=C\exp(r_1\cdot t)+D\exp(r_2\cdot t)=\left[A\cos(w_a t)+B\sin(w_a t)\right]\exp(-z\cdot t)}$$

La grandeur $\omega_a=\frac{\omega_0}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$ est la ***pseudo-pulsation***. On ne parle alors pas de pulsation car x(t) est composée d'une fonction sinusoïdale de pulsation ω_a amortie par une fonction exponentielle.

Remarques : l'exponentielle en facteur dans x(t) peut s'écrire exp(-t/t) avec $t=2Q/w_0$ la constante de temps du système, qui chiffre la ***durée caractéristique*** *de l'évolution du système. On parle aussi de relaxation. La pseudo période est $T_a=2p/w_a$ et le facteur de qualité donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillation (de pseudo périodes) visibles.*

2.4. Régime apériodique

Si *D* ***est positif*** *(c'est-à-dire si Q < ½, z > 1, amortissement élevé),* ***la solution est dite apériodique.*** Les deux solutions de l'équation caractéristique sont réelles et négatives :

$$r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4} \quad avec \quad r_1 > r_2$$

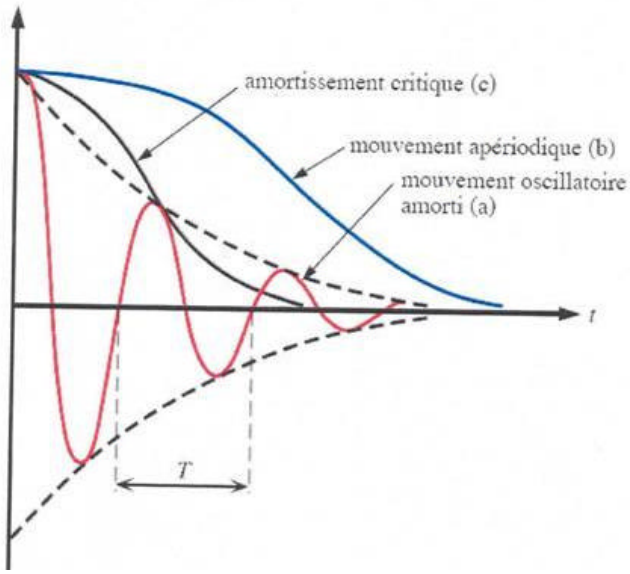
La solution x(t) peut donc s'écrire sous la forme :

$$\boxed{x(t) = C\exp(r_1 \cdot t) + D\exp(r_2 \cdot t)}$$

L'amplitude décroît sans oscillation. La durée caractéristique (temps de relaxation) τ de ce régime est τ=-1/r_1.

2.5. Régime critique

Si *D* ***est nul*** *(c'est-à-dire si Q = ½, z = 1),* ***la solution est dite critique.*** La solution est double $r = -\frac{w_0}{2Q}$. La solution x(t) peut donc s'écrire sous la forme :

$$\boxed{x(t) = (A + Bt)\exp(r \cdot t)}$$

L'évolution est une limite du cas du régime apériodique. La stabilisation en x=0 est la plus rapide des trois régimes. La durée caractéristique est $\tau = 2Q / \omega_0$.